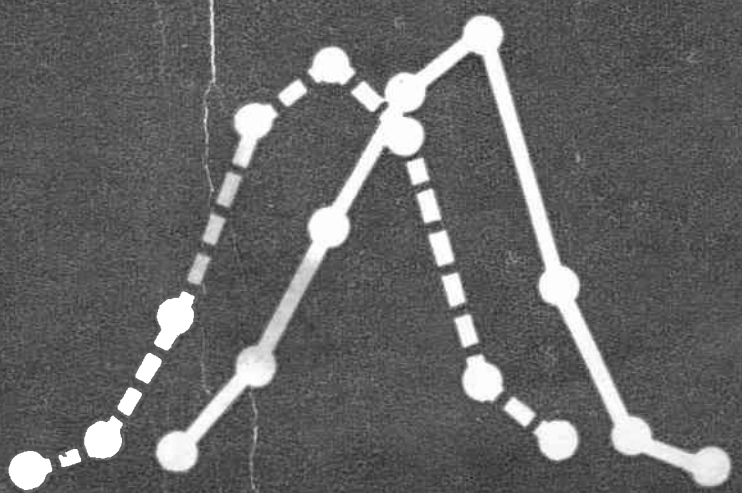
Corina Reischer
Anca Sâmboan

Culegere de probleme de teoria probabilităților și statistică matematică



Editura didactică și pedagogică — București

Corina Reischer
Prof. univ.

Anca Sâmboan
Cercetător științific

Culegere de probleme de teoria probabilităților și statistică matematică

pentru licee

Editura didactică și pedagogică — București, 1972

Introducere

Calculul probabilităţilor şi statistica matematică sînt ramuri deosebit de importante şi actuale ale matematicii. Contactul lor permanent cu alte ştiinţe, chiar şi cu cele considerate pînă nu de mult „nematematizabile", a dus la o îmbogăţire şi evoluţie impresionantă a acestor discipline.

Modelele probabilistice şi metodele statistice de confruntare a acestor modele cu realitatea obiectivă oferă procedee de investigaţie ştiinţifică în sectoare de activitate dintre cele mai diferite.

Aceasta explică importanţa deosebită care se acordă teoriei probabilităţilor şi statisticii matematice în ţara noastră. Introducerea în cadrul învăţămîntului de cultură generală a unor elemente de teoria probabilităţilor şi statistică matematică a corespuns unor cerinţe stringente ale unui învăţămînt modern şi eficient.

Prezenta culegere vine să umple, în parte, un gol existent în literatura de specialitate. Ca orice disciplină matematică, teoria probabilităţilor şi statistica matematică cer ca însuşirea noţiunilor teoretice să fie întovărăşită de efectuarea unui număr mare de exerciţii şi probleme. Cu ajutorul lor se aprofundează şi se îmbogăţeşte conţinutul teoretic, se dau sugestii de aplicare în practică a noţiunilor, se formează tehnica de rezolvare a problemelor.

Culegerea acoperă în întregime programa actuală pentru liceu, dar conţine şi multe chestiuni în plus. Prin aceasta, am urmărit să o facem utilă şi profesorilor din liceu şi unor categorii foarte largi de tehnicieni şi ingineri care se întîlnesc cu probleme de acest tip în cadrul procesului de reciclare. În acest scop am considerat util ca primul paragraf din fiecare capitol să conţină noţiunile teoretice care sînt amintite foarte pe scurt; o pondere mai mare a fost acordată paragrafului întîi din capitolul de „Elemente de statistică matematică", avînd în vedere tocmai aplicaţiile statisticii în practică.

În general fiecare capitol cuprinde o gamă largă de probleme dispuse gradat în ordinea dificultăţilor crescînde. Paragraful al doilea din fiecare capitol cuprinde probleme rezolvate. Pentru a se sesiza mai bine tipul de pro-

blemă, am preferat să folosim, în special în capitolul II, modelul clasic furnizat de urne cu bile, model utilizat cu succes în literatura didactică universală.

Pentru a lega probabilitățile de celelalte discipline matematice care se predau în liceu, am introdus, în capitolul III, o serie de probleme, care pot servi și drept probleme recapitulative, deoarece cer cunoștințe de aritmetică, algebră, geometrie analitică, mecanică etc.

În capitolul IV, la fiecare problemă am pornit de la date reale luate direct din producție sau din cercetarea științifică. Am urmărit în special interpretarea rezultatelor. Dat fiind caracterul complex al realității, în unele probleme apar tabele mai lungi și calcule mai greoaie. În multe probleme am dat în enunț rezultatul calculelor și am cerut numai interpretarea. Prin aceste probleme am urmărit să stimulăm interesul în desprinderea aspectului probabilistic și statistic, în matematizarea anumitor situații întîlnite în practică, deoarece dacă este important să poți rezolva o problemă propusă de cineva, este însă mult mai important să poți formula singur o problemă pe care apoi s-o rezolvi.

Prin varietatea domeniilor din care sînt culese datele am căutat să sugerăm o idee asupra ariei deosebit de vaste a aplicațiilor posibile ale statisticii.

După enunțul fiecărei probleme din capitolul IV, apare, în paranteză, sursa care ne-a furnizat datele. Dorim să mulțumim și cu această ocazie tuturor acelora care ne-au pus la dispoziție datele. Sprijinul acestora ne-a fost foarte prețios.

În anexa I sînt prezentate probleme (cu rezolvări) date la concursurile de matematică din țara noastră începînd din anul 1969, iar în anexa II sînt propuse cîteva probleme de probabilități geometrice; ele pot fi utile elevilor din clasele speciale de matematică și din cercurile de matematică.

În text trimiterile s-au făcut în felul următor: în cadrul aceluiași paragraf s-a indicat numai numărul problemei, în cadrul aceluiași capitol s-a dat numărul problemei și al paragrafului, iar în capitole diferite, numărul problemei, al paragrafului și al capitolului.

Recomandăm cititorului să consulte în prealabil lista de notații principale care apare la începutul culegerii.

De asemenea recomandăm cititorilor următoarele lucrări apărute în țara noastră:

Mihoc, Gh., Micu, N. — *Elemente de teoria probabilităților și statistică. Proiect de manual pentru clasa a XII-a.* Editura didactică și pedagogică, București, 1966.

Mihoc, Gh., Micu, N. — *Introducere în teoria probabilităților.* Editura tehnică, București, 1970.

Ciucu, G., Sâmboan, G. — *Teoria probabilităților și statistică matematică. Culegere de probleme.* Editura tehnică, București, 1962.

Ciucu, G., Craiu, G., Săcuiu, I. — *Culegere de probleme de teoria probabilităților*. Editura tehnică, București, 1967.
Ciucu, G., Craiu, V. — *Probleme de statistică matematică*. Editura didactică și pedagogică, București, 1968.
Ciucu, G., Craiu, V. — *Introducere în teoria probabilităților și statistică matematică*. Editura didactică și pedagogică, București, 1971.
Gazeta matematică, seria B.

Fiind prima culegere de acest gen care se adresează direct elevilor, pe lîngă alte lipsuri are și amprenta începutului. De aceea vom fi foarte recunoscători tuturor acelora care prin sugestii și observații ne vor ajuta să înlăturăm unele neajunsuri și eventual să îmbunătățim și să extindem conținutul.

Autorii

Cuprins

Introducere 3
Lista de notații principale 9

Capitolul I

CÎMP FINIT DE EVENIMENTE

§1. Noțiuni de bază. Definiții și proprietăți 11
§2. Exerciții și probleme rezolvate 14
§3. Exerciții și probleme propuse 20
§4. Indicații și răspunsuri 23

Capitolul II

CÎMP DE PROBABILITATE FINIT

§1. Noțiuni de bază. Definiții și proprietăți 27
§2. Exerciții și probleme rezolvate 33
§3. Exerciții și probleme propuse 54
§4. Indicații și răspunsuri 65

Capitolul III

VARIABILE ALEATOARE

§1. Noțiuni de bază. Definiții și proprietăți 74
§2. Exerciții și probleme rezolvate 81
§3. Exerciții și probleme propuse 105
§4. Indicații și răspunsuri 115

Capitolul IV

ELEMENTE DE STATISTICĂ MATEMATICĂ

§1. Noțiuni de bază ale statisticii matematice 123
§2. Exerciții și probleme rezolvate 140
§3. Exerciții și probleme propuse 171
§4. Indicații și răspunsuri 187
Anexa 1 — Probleme date la concursuri de matematică 204
Anexa 2 — Probabilități geometrice. Probleme pentru cercuri de matematică 211

Lista de notații principale

$k = \overline{0, n}$	indicele k ia valorile 0, 1, 2, ...,n
$k = \overline{1, n}$	indicele k ia valorile 1, 2, ..., n
$A_k,\ k = \overline{1, n}$	$\{A_1, A_2, ..., A_n\}$
E	eveniment sigur
$\emptyset$	eveniment imposibil
$A,\ B,\ C$	evenimente aleatoare
$\bar{A}$	evenimentul contrar lui A
$A \subset B$	evenimentul A implică evenimentul B
$A \cup B$	reuniunea evenimentelor A și B
$A \cap B$	intersecția evenimentelor A și B
$A - B$	diferența evenimentelor A și B
$\{E, K\}$	cîmp de evenimente
$P(A)$	probabilitatea evenimentului A
$P,\ p$	notație generică pentru probabilitatea unui eveniment
$Q,\ q$	notație generică pentru probabilitatea unui eveniment contrar
$P_B(A),\ P(A/B)$	probabilitatea evenimentului A condiționată de evenimentul B
$P(n;\ m)$	probabilități în schema Bernoulli.
$P(n;\ m_1, ..., m_k)$	probabilități în schema polinomială
P_m	probabilități în schema Poisson
$P_{a,b}\ (\alpha,\beta)$	probabilități în schema bilei neîntoarse
$X,\ Y$	variabile aleatoare
$M(X)$	valoarea medie a variabilei aleatoare X
$D^2(X)$	dispersia variabilei aleatoare X
$\sigma(X)$	abaterea medie pătratică a variabilei aleatoare X
$M_k(X)$	momentul inițial de ordin k al variabilei aleatoare X
$\mathcal{P}$	populație statistică
f	caracteristică pe o populație statistică
$\{(x,\ f(x)),\ x \in \mathcal{P}\}$	repartiție empirică sau serie statistică
n_i	frecvență absolută
$n_i \uparrow$	frecvență absolută cumulată crescătoare
$n_i \downarrow$	frecvență absolută cumulată descrescătoare
f_i	frecvență relativă
$f_i \uparrow$	frecvență relativă cumulată crescătoare
$f_i \downarrow$	frecvență relativă cumulată descrescătoare
$\bar{x}$	media unei selecții
σ^2	dispersia unei selecții
σ	abaterea medie pătratică

M	modul
Me	mediană
$n!$	n factorial; $n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$
C_n^m	combinări de n elemente luate cîte m

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}, \quad m < n$$

A_n^m	aranjamente de n elemente luate cîte m

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$$

P_n	permutări de n elemente $P_n = n!$

Capitolul I

CÎMP FINIT DE EVENIMENTE

§ 1. Noțiuni de bază. Definiții și proprietăți

1. Experiență, probă, eveniment

În teoria probabilităților sînt studiate experiențele cu rezultat întîmplător, numite *experiențe aleatoare*. Le vom numi mai scurt *experiențe*.

Rezultatele posibile ale unei experiențe se numesc *probe*.

Experiențele pot avea un număr finit de probe sau un număr infinit de probe. Ne vom referi numai la experiențe cu un număr finit de probe, fără a mai specifica ulterior aceasta.

În legătură cu o experiență, numim *eveniment aleator* sau mai scurt *eveniment (atașat experienței)* orice situație care se poate realiza prin una sau mai multe probe. Vom nota evenimentele aleatoare A, B, C, ..., A_1, ...

Un eveniment este, deci, determinat prin mulțimea probelor prin care se realizează, prin urmare îl putem interpreta ca o submulțime a mulțimii tuturor probelor experienței. De aceea dacă un eveniment A se poate realiza prin probele $i, j, ..., k$ vom nota uneori $A = \{i, j, ..., k\}$.

Evenimentele care se realizează prin o singură probă se numesc *evenimente elementare*, celelalte *evenimente compuse*.

Din motive care vor apărea clar mai departe în legătură cu o experiență se consideră și următoarele două evenimente:

— evenimentul care se realizează prin oricare din probe, numit *evenimentul sigur* și notat cu E. Acestui eveniment îi corespunde mulțimea tuturor probelor experienței (partea totală);

— evenimentul care nu se realizează prin nici o probă, numit *evenimentul imposibil*. Acestui eveniment îi corespunde partea vidă, $\emptyset$, a mulțimii de probe ale experienței, de aceea notăm evenimentul imposibil cu $\emptyset$.

2. Evenimente contrare

Evenimentul contrar lui A, sau *non-A* este evenimentul care se realizează atunci și numai atunci cînd nu se realizează A. Evenimentul contrar lui A

îl vom nota cu $\bar{A}$*). Se observă că $\bar{\bar{A}} = A$. Submulțimile de probe atașate evenimentelor A și $\bar{A}$ sînt complementare față de mulțimea tuturor probelor experienței.

3. Relații între evenimente

a) *Echivalența evenimentelor.* Este firesc să numim evenimente echivalente evenimentele care se realizează simultan. Aceasta revine la egalitatea mulțimilor de probe care corespund evenimentelor; se notează $A = B$.

b) *Implicația evenimentelor.* Spunem că evenimentul A implică evenimentul B, dacă realizarea evenimentului A atrage realizarea evenimentului B; se notează cu $A \subset B$.

De observat că $A \subset B$ revine la faptul că orice probă care realizează evenimentul A, realizează și evenimentul B, adică la incluziunea mulțimii de probe atașată evenimentului A în mulțimea de probe atașată evenimentului B, ceea ce justifică notația $A \subset B$ și accepțiunea că evenimentul imposibil implică orice eveniment, adică $\emptyset \subset A$, oricare ar fi evenimentul A. Orice eveniment A implică evenimentul sigur E, deci $A \subset E$, iar un eveniment elementar este implicat numai de el însuși și de evenimentul imposibil.

Relația de implicație se bucură de proprietățile unei relații de ordine, adică:

1. reflexivitatea: $A \subset A$, pentru orice eveniment A
2. antisimetria: dacă $A \subset B$ și $B \subset A$, atunci $A = B$
3. tranzitivitatea: dacă $A \subset B$ și $B \subset C$, atunci $A \subset C$.

Deoarece există perechi de evenimente A, B din mulțimea evenimentelor atașate unei experiențe, pentru care $A \not\subset B$ și $B \not\subset A$, relația de implicație dintre evenimente este o *relație de parțială ordonare.*

4. Operații cu evenimente

În mulțimea evenimentelor atașate unei experiențe se pot introduce mai multe operații:

a) *Reuniunea evenimentelor.* Fiind date două evenimente, A și B, numim reuniunea lor evenimentul care se realizează atunci cînd se realizează cel puțin unul dintre evenimentele A și B. Reuniunea evenimentelor A și B se notează cu $A \cup B$ și se citește „A sau B".

b) *Intersecția evenimentelor.* Fiind date două evenimente A și B, numim intersecția lor evenimentul care se realizează atunci cînd se realizează simultan evenimentele A și B. Intersecția evenimentelor A și B se notează cu $A \cap B$ și se citește „A și B".

Două evenimente A și B sînt *incompatibile* dacă $A \cap B = \emptyset$ adică dacă nu se pot realiza simultan; în caz contrar evenimentele sînt *compatibile.*

*) Se mai utilizează notațiile A^c, $\complement A$, A^*.

Operațiile de reuniune și intersecție se extind pentru orice număr finit de evenimente, fie ele $A_1, \ldots, A_n$; avem corespunzător

$$A_1 \cup \ldots \cup A_n = \bigcup_{j=1}^{n} A_j \text{ și } A_1 \cap \ldots \cap A_n = \bigcap_{j=1}^{n} A_j .$$

Aceste operații sînt comutative și asociative.

c) *Diferența evenimentelor.* Numim diferența evenimentelor A și B, evenimentul care se realizează atunci cînd se realizează A dar nu se realizează B. Îl notăm prin $A-B$. Avem:

$$A - B = A \cap \bar{B} \text{ și } \bar{A} = E - A.$$

Subliniem faptul că dacă unui eveniment îi atașăm mulțimea de probe prin care se realizează, atunci operațiile dintre evenimente revin la operațiile respective dintre mulțimile de probe corespunzătoare și deci rezultatele operațiilor cu evenimente atașate unei experiențe sînt evenimente atașate aceleiași experiențe.

5. Cîmp de evenimente

Fie $E = \{E_1, \ldots E_n\}$, mulțimea tuturor evenimentelor elementare corespunzătoare unei experiențe.

Definiție. Se numește *cîmp de evenimente finit,* mulțimea tuturor submulțimilor lui E, la care se adaugă mulțimea E însăși și mulțimea vidă, deci

$\{E_1\}, \ldots, \{E_n\}$	în	număr	de	$\mathcal{C}_n^1$
$\{E_1, E_2\}, \ldots, \{E_{n-1}, E_n\},$	„	„	„	$\mathcal{C}_n^2$
$\{E_1, E_2, E_3\}, \ldots$	„	„	„	$\mathcal{C}_n^3$
.....				
$\{E_1, \ldots, E_{n-1}\}, \ldots$	„	„	„	$\mathcal{C}_n^{n-1}$
$\{E_1, \ldots, E_n\},$	„	„	„	$\mathcal{C}_n^n$
$\emptyset$	„	„	„	1

Un cîmp de evenimente conține deci $1 + \mathcal{C}_n^1 + \ldots + \mathcal{C}_n^n = (1+1)^n = 2^n$ evenimente, unde n este numărul de evenimente elementare.

Un cîmp de evenimente se notează cu $\{E, K\}$.

Se observă că un cîmp de evenimente, odată cu două evenimente A și B conține și evenimentele $A \cup B$, $A \cap B$, $A - B$, iar odată cu un eveniment A conține pe $\bar{A}$; se mai spune că un cîmp de evenimente este închis față de operațiile respective.

În cîmpul de evenimente, $\emptyset$ este evenimentul imposibil, iar E (mulțimea evenimentelor elementare) este evenimentul sigur.

Ori de cîte ori într-o relație vor intra mai multe evenimente, vom presupune că ele aparțin aceluiași cîmp de evenimente și nu vom mai specifica expres acest lucru.

§ 2. Exerciții și probleme rezolvate

1. *Care sînt probele următoarei experiențe: se scrie un număr de două cifre distincte alese la întîmplare dintre cifrele* 1,3,4.

Rezolvare. Scrierea numerelor: 13, 14, 31, 34, 41, 43. Numărul probelor este $\mathcal{A}_3^2 = 6$.

2. *Care sînt probele următoarei experiențe: extragerea simultană a două bile dintr-o urnă cu* 3 *bile albe* și 2 *bile negre?*

Rezolvare: Să notăm cu a_1, a_2, a_3 bilele albe și cu n_1, n_2 bilele negre. Probele (evenimentele elementare) experienței sînt: extragerea bilelor a_1 și a_2 pe care o notăm simbolic cu (a_1, a_2) și (a_1, a_3); (a_1, n_1); (a_1, n_2); (a_2, a_3); (a_2, n_1); (a_2, n_2); (a_3, n_1); (a_3, n_2); (n_1, n_2). Numărul probelor este $\mathcal{C}_5^2 = 10$.

3. *Dintr-o urnă cu* 3 *bile albe și* 2 *bile negre se extrag, la întîmplare, două bile.*

a) *Se consideră evenimentele:*

A_1 — *obținerea a două bile negre,*
A_2 — *obținerea cel puțin a unei bile albe,*
A_3 — *obținerea unei singure bile albe,*
A_4 — *obținerea unei singure bile negre,*
A_5 — *obținerea a două bile roșii.*

Folosind definițiile precizați pentru fiecare eveniment dacă este pe de o parte aleator, sigur, imposibil, iar pe de altă parte elementar sau compus.

b) *Să se regăsească rezultatele de la punctul a) folosind mulțimile de probe atașate evenimentelor.*

Rezolvare: a) A_1, A_2, A_3, A_4 sînt evenimente aleatoare deoarece la o efectuare a experienței (o extragere) oricare din ele se poate sau nu se poate realiza. De exemplu: dacă rezultatul experienței este (a_1, a_2), A_1 nu s-a realizat, dar dacă rezultatul experienței este (n_1, n_2), A_1 s-a realizat, unde am notat bilele ca în problema precedentă.

Evenimentul A_5 este evenimentul imposibil, deoarece oricare ar fi rezultatul experienței A_5 nu se realizează.

A_1 este eveniment elementar deoarece se realizează numai printr-o probă: (n_1, n_2).

A_2 este eveniment compus pentru că se realizează prin mai multe probe: (a_1, a_2), (a_2, a_3), (a_2, n_2) ș.a.

A_3, A_4 sînt de asemenea evenimente compuse.

A_5 nu este nici elementar, nici compus.

b) Avem: $A_1 = \{(n_1, n_2)\}$, eveniment aleator elementar.

$A_2 = \{(a_1, a_2), (a_1, a_3), (a_1, n_1), (a_1, n_2), (a_2, a_3), (a_2, n_1), (a_2, n_2), (a_3, n_1), (a_3, n_2)\}$ eveniment aleator compus,

$A_3 = \{(a_1, n_1), (a_1, n_2), (a_2, n_1), (a_2, n_2), (a_3, n_1), (a_3, n_2)\}$, . eveniment aleator compus.

$A_4 = \{(n_1, a_1), (n_1, a_2), (n_1, a_3), (n_2, a_1), (n_2, a_2), (n_2, a_3)\}$, eveniment aleator compus.

$$A_5 = \emptyset.$$

4. *Se consideră evenimentele A_1, A_2, A_3, A_4 din problema precedentă. Să se precizeze perechile de evenimente egale, perechile de evenimente compatibile, perechile de evenimente incompatibile, perechile de evenimente contrare, perechile de evenimente din care primul implică pe al doilea.*

Rezolvare: $A_3 = A_4$ deoarece obținerea unei singure bile albe (realizarea lui A_3) implică obținerea unei singure bile negre (realizarea lui A_4) și reciproc, sau din egalitatea mulțimilor de probe atașate.

Sînt compatibile perechile de evenimente (A_2, A_3); (A_2, A_4); (A_3, A_4) deoarece se pot realiza simultan.

Sînt incompatibile perechile de evenimente (A_1, A_2), (A_1, A_3), (A_1, A_4) deoarece ele nu se pot (respectiv) realiza simultan.

Sînt contrare evenimentele A_1 și A_2 căci obținerea a două bile negre (realizarea lui A_1) atrage imposibilitatea obținerii cel puțin a unei bile albe (realizarea lui A_2) și reciproc.

Relațiile $A_3 \subset A_4$ și $A_4 \subset A_3$ sînt imediate. Relația $A_3 \subset A_2$ rezultă din aceea că ori de cîte ori se obține o singură bilă albă (realizarea lui A_3) înseamnă că s-a realizat evenimentul A_2 (obținerea cel puțin a unei bile albe). Aceasta se deduce și din incluziunea dintre mulțimile de probe atașate.

5. *Din șirul primelor 1 000 numere naturale*) se alege la întîmplare un număr. Fie A evenimentul ca numărul ales să fie par. Ce înseamnă evenimentul $\bar{A}$?*

Rezolvare. Numărul ales este impar.

6. *Se controlează calitatea a cinci produse. Fie A evenimentul ca cel puțin unul din produse să fie defect și B evenimentul ca cel mult două din produse să fie defecte.*

Ce înseamnă evenimentele $\bar{A}$ și $\bar{B}$?

Rezolvare. $\bar{A}$ este evenimentul ca toate produsele controlate să fie bune, ar $\bar{B}$ este evenimentul ca cel puțin trei produse să fie defecte.

---

*) Restricția făcută în această problemă, ca și în cele ce urmează de acest tip, asigură că experiențele întîmplătoare considerate au un număr finit de probe.

7. *Din mulțimea polinoamelor de grad cel mult egal cu n și cu coeficienți din mulțimea întregilor din intervalul* $[-1000, 1000]$ *se scrie la întîmplare un polinom fie el* $P(x)$. *Fie, A evenimentul ca polinomul* $P(x)$ *să se dividă prin binomul* $x - 3$ *și B evenimentul ca derivata* $P'(x)$ *să se dividă prin* $x - 3$. *Ce înseamnă evenimentele* $A \cap B$, $A \cup B$?

Rezolvare. Evenimentul $A \cap B$ înseamnă că atît $P(x)$ cît și $P'(x)$ se divid prin $x - 3$, deci polinomul $P(x)$ admite pe 3 ca rădăcină cel puțin dublă. Evenimentul $A \cup B$ înseamnă că sau $P(3) = 0$, sau $P'(3) = 0$, sau 3 este o rădăcină comună pentru polinoamele $P(x)$ și $P'(x)$.

8. *Din șirul primelor* 1 000 *numere naturale se alege la întîmplare un număr. Fie A evenimentul ca numărul ales să înceapă cu cifra* 1; *B evenimentul ca numărul ales să se termine cu cifra* 2.

Ce înseamnă evenimentul $A - B$?

Rezolvare. Avem $A - B = A \cap \bar{B}$, deci numărul natural ales trebuie să înceapă cu cifra 1 și să se termine cu orice cifră diferită de 2.

9. *Din șirul primelor* 2000 *de numere naturale se alege la întîmplare un număr.*

Fie A evenimentul ca numărul ales să fie divizibil prin 2; *B evenimentul ca numărul ales să fie divizibil prin* 3; *C evenimentul ca numărul ales să se termine cu cifra zero. Ce reprezintă evenimentele:*

a) $C \cap (A \cup B)$ b) $(A \cap B) \cup C$ c) $(A \cap B) \cup (A \cap C)$?

Rezolvare. a) Numărul natural ales trebuie să se termine cu zero și să se dividă prin 2, sau prin 3, sau prin 6.

b) Numărul natural ales trebuie să se dividă prin 6, sau să se termine cu zero, sau să se dividă prin 6 și să se termine cu zero.

c) Numărul natural ales trebuie să se dividă prin 6 (se realizează în acest caz $A \cap B$); sau să se termine cu zero (se realizează în acest caz $A \cap C$); sau să se dividă prin 6 și să se termine cu zero.

10. *Rezistențele* R_i *montate în schema electrică din figura* 1 *au fost extrase fiecare la întîmplare din cîte un lot de rezistențe* L_i, $i = \overline{1, 7}$. *Fiecare lot conține rezistențe bune și defecte. Considerăm evenimentele.*

A: *curentul electric trece de la punctul M la punctul N;*

B_i: *Rezistența* R_i *extrasă din lotul* L_i *este bună,*
$i = \overline{1, 7}$.

a) *Să se arate că*
$B_1 \cap (B_2 \cup B_3) \subset A$,
$B_4 \cap (B_5 \cup B_6 \cup B_7) \subset A$.

b) *Să se exprime evenimentele A și $\bar{A}$ prin intermediul evenimentelor B_i.*

Rezolvare. Rezistențele R_1 și R_4 sînt legate în serie, iar rezistențele R_2, R_3 și R_5, R_6, R_7 sînt legate în paralel.

a) Curentul electric trece de la punctul M la punctul N atunci cînd rezistența R_1 și cel puțin una dintre rezistențele R_2 și R_3 sînt bune, deci $B_1 \cap (B_2 \cup B_3) \subset A$.

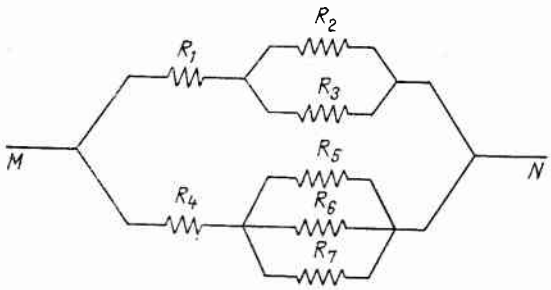


Fig. 1

Analog se arată a doua implicație.

b) $A = [B_1 \cap (B_2 \cup B_3)] \cup [B_4 \cap (B_5 \cup B_6 \cup B_7)]$,

$\bar{A} = [\bar{B}_1 \cup (\bar{B}_2 \cap \bar{B}_3)] \cap [\bar{B}_4 \cup (\bar{B}_5 \cap \bar{B}_6 \cap \bar{B}_7)]$.

11. *Să se arate că*

a) $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$*)

b) $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$*)

Rezolvare. a) Evenimentul $A \cup B$ se realizează atunci cînd se realizează cel puțin unul dintre evenimentele A și B, prin urmare evenimentul contrar $\overline{A \cup B}$ înseamnă nerealizarea atît a lui A cît și a lui B, adică realizarea lui $\bar{A}$ și a lui $\bar{B}$, deci a lui $\bar{A} \cap \bar{B}$, de unde

$$\overline{A \cup B} \subset \bar{A} \cap \bar{B}.$$

În mod analog se arată și incluziunea contrară,

$$\bar{A} \cap \bar{B} \subset \overline{A \cup B},$$

de unde relația cerută la punctul a).

Punctul b) se demonstrează în mod analog.

12. *Să se arate că*

a) $\overline{\bar{A} \cap \bar{B}} = A \cup B$ b) $\overline{\bar{C} \cup \bar{D}} = C \cap D$.

*) Relațiile lui De Morgan (1806—1871) matematician englez.

Rezolvare. a) Evenimentul $\bar{A} \cap \bar{B}$ înseamnă nerealizarea evenimentului A și nerealizarea evenimentului B, prin urmare, contrarul acestui eveniment și anume, $\overline{\bar{A} \cap \bar{B}}$, înseamnă realizarea a cel puțin unuia dintre evenimentele A și B, deci

$$\overline{\bar{A} \cap \bar{B}} \subset A \cup B \tag{1}$$

Pe de altă parte dacă se realizează evenimentul $A \cup B$, deci cel puțin unul dintre evenimentele A, B, atunci nu se realizează $\bar{A} \cap \bar{B}$, prin urmare se realizează $\overline{\bar{A} \cap \bar{B}}$, adică

$$A \cup B \subset \overline{\bar{A} \cap \bar{B}}. \tag{2}$$

Din (1) și (2) urmează egalitatea dorită.

b) Să luăm în egalitatea a) $\bar{A} = C$ și $\bar{B} = D$, obținem

$$\overline{C \cap D} = \bar{C} \cup \bar{D}$$

și trecînd la evenimentele contrare

$$C \cap D = \overline{\bar{C} \cup \bar{D}}$$

Observație. Această problemă se poate rezolva și altfel și anume ținînd seama de problema precedentă și de faptul că $\bar{\bar{A}} = A$.

13. *Să se arate că relațiile*

$$A \subset B;\ \bar{B} \subset \bar{A};\ A \cup B = B;\ A \cap B = A$$

sînt echivalente. *)

Rezolvare. Arătăm mai întîi că relațiile $A \subset B$ și $\bar{B} \subset \bar{A}$ sînt echivalente. Fie $A \subset B$, atunci realizarea lui A implică și realizarea lui B, iar dacă se realizează $\bar{B}$ atunci nu se poate realiza A, deci se realizează $\bar{A}$, prin urmare $\bar{B} \subset \bar{A}$.

Fie acum $\bar{B} \subset \bar{A}$, atunci realizarea lui $\bar{B}$ implică și realizarea lui $\bar{A}$, iar dacă se realizează A nu se poate realiza $\bar{B}$, deci se realizează B și deci $A \subset B$.

Arătăm acum echivalența relațiilor $A \subset B$ și $A \cup B = B$. Presupunem că $A \subset B$, vom arăta că $A \cup B \subset B$ care împreună cu implicația evidentă $B \subset A \cup B$ va da $A \cup B = B$. Dacă se realizează $A \cup B$ atunci sau se realizează B sau se realizează A și atunci deoarece $A \subset B$ se realizează și B, deci în orice caz $A \cup B \subset B$.

Fie acum $A \cup B = B$. Avem $A \subset A \cup B = B$, deci $A \subset B$.

*) Două relații M și N sînt echivalente dacă presupunînd M adevărată rezultă și N adevărată și reciproc.

Arătăm acum echivalența relațiilor $A \subset B$ și $A \cap B = A$. Fie iar $A \subset B$, atunci $A \subset A \cap B$ și cum $A \cap B \subset A$ urmează $A \cap B = A$. Presupunem că $A \cap B = A$, atunci din $A \cap B \subset B$ urmează $A \subset B$, deci echivalența dorită.

Să arătăm echivalența relațiilor $A \cup B = B$ și $A \cap B = A$. Fie $A \cup B = B$, atunci din $A = A \cap (B \cup A)$ (proprietatea de absorbție, vezi exercițiul **10**, punctul b), § 3) urmează $A = A \cap B$. Reciproc, fie acum $A = A \cap B$ atunci din $B = B \cup (A \cap B)$ (vezi exercițiul **10** punctul *b*), § 3) urmează $B = B \cup A = A \cup B$ (în baza comutativității operației de reuniune).

Celelalte echivalențe se demonstrează analog.

14. *Să se arate că relațiile*

$$A \cap B = \emptyset; \qquad A \subset \bar{B}; \qquad B \subset \bar{A},$$

sînt echivalente.

Rezolvare. Din $A \cap B = \emptyset$ rezultă că evenimentele A și B sînt incompatibile. Să presupunem că se realizează A, aceasta implică nerealizarea lui B. Dar, nerealizarea lui B înseamnă realizarea lui $\bar{B}$ și deci

$$A \subset \bar{B}.$$

Reciproc, fie $A \subset \bar{B}$, și să presupunem că se realizează A, atunci se realizează și $\bar{B}$, deci nu se realizează B; cu alte cuvinte, A și B nu se pot realiza simultan, deci $A \cap B = \emptyset$.

În mod analog deducem că din $A \cap B = \emptyset$ rezultă $B \subset \bar{A}$ și reciproc. La fel se arată că relațiile $A \subset \bar{B}$ și $B \subset \bar{A}$ sînt echivalente.

15. *Se consideră experiența de extragere a unei bile dintr-o urnă care conține patru bile albe numerotate cu numerele* 1, 2, 3, 4 *și o bilă neagră numerotată cu numărul* 5.

a) *Să se scrie cîmpul de evenimente ataşat acestei experiențe.*

b) *Cîte evenimente sînt în cîmp?*

c) *Să se scrie evenimentele elementare.*

d) *Să se scrie implicațiile dintre evenimente.*

Rezolvare. a) $\{E, K\} = \{\emptyset, \{k\}, \{i, j\}, \{i, j, k\}, \{i, j, k, l\}, \{i, j, k, l, m\}\}$, unde i, j, k, l, m iau independent valorile de la 1 la 5, dar cu restricția că în cadrul unei grupe toți indicii să fie diferiți, iar două grupe cu același număr de indici să difere prin cel puțin un indice. Am notat cu $\{k\}$ extragerea bilei cu numărul k; evenimentele de forma $\{i, j\}$, $\{i, j, k\}$, $\{i, j, k, l\}$, arată că am extras sau bila i sau bila j $(i \neq j)$ etc., iar $\{i, j, k, l, m\} = E$ reprezintă evenimentul sigur.

b) Cîmpul de evenimente se compune din:

$1 + \mathcal{C}_5^1 + \mathcal{C}_5^2 + \mathcal{C}_5^3 + \mathcal{C}_5^4 + \mathcal{C}_5^5 = (1 + 1)^5 = 2^5$ evenimente.

c) Evenimentele elementare sînt:
$\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}$.

d) $\{1\} \subset \{1, 2\}$; $\{1\} \subset \{1, 3\}$; $\{1\} \subset \{1, 4\}$; $\{1\} \subset \{1,5\}$,
$\{1\} \subset \{1, 2, 3,\}$;...
$\{2\} \subset \{1, 2\}$; $\{2\} \subset \{2, 3\}$; $\{2\} \subset \{2, 4\}$; $\{2\} \subset \{2,5\}$,
.....
$\{1, 2\} \subset \{1, 2, 3\}$; .....
.....
$\{1, 2, 3, 4\} \subset \{1, 2, 3, 4, 5\}$,

iar evenimentul imposibil $\emptyset$ implică fiecare eveniment.

§ 3. Exerciții și probleme propuse

1. Se aruncă simultan două monede (una de 5 bani și una de 10 bani) și se urmărește ce fețe apar.

a) Care sînt probele experienței?

b) Fie evenimentele: A_1 — apariția stemei pe una din monede, A_2 — apariția stemei pe cealaltă monedă. Ce fel de evenimente sînt A_1 și A_2. Sînt compatibile sau incompatibile?

2. Dintr-o urnă cu 10 bile dintre care 6 albe și 4 negre se extrag 2 bile. Fie A evenimentul ca între cele două bile extrase să fie cel puțin o bilă albă, și B evenimentul ca ambele bile să fie albe. Evenimentele A și B sînt compatibile sau incompatibile? Sînt evenimente elementare sau compuse?

3. Se aruncă un zar. Să notăm cu A evenimentul de apariție a uneia din fețele 1,2 și cu B evenimentul de apariție a uneia din fețele 3, 4, 5, 6. Ce fel de evenimente sînt A și B?

4. Dintr-un lot de piese prelucrate într-o zi la un strung se extrag deodată patru piese. Să notăm cu A evenimentul ca toate cele patru piese extrase să fie bune și cu B evenimentul ca cel puțin o piesă să fie rebut.

Ce fel de evenimente sînt

a) $A \cup B$ b) $A \cap B$?

5. Doi elevi joacă o partidă de șah. Fie A evenimentul ca primul elev să cîștige partida și B evenimentul ca al doilea elev să cîștige partida. Partida s-a terminat remiză:

a) S-a realizat vreunul dintre evenimentele A și B?

b) Să se scrie evenimentul realizat, prin intermediul evenimentelor A și B.

6. Din șirul primelor 1 000 de numere naturale se alege la întîmplare un număr. Fie A evenimentul ca numărul ales să se dividă prin 5, iar B evenimentul ca numărul ales să se termine cu cifra zero. Ce înseamnă evenimentul $A - B$?

7. Din mulțimea polinoamelor de grad cel mult n cu coeficienți întregi din intervalul $[-5\,000, 1\,000]$ se scrie la întîmplare un polinom, fie el $P(x)$. Să considerăm evenimentele:

A_1 : polinomul $P(x)$ se divide prin $x - 1$.

A_2 : derivata $P'(x)$ se divide prin $x - 1$.

A_3 : derivata a doua $P''(x)$ se divide prin $x - 1$.

B : polinomul $P(x)$ admite pe 1 ca rădăcină cel puțin triplă.

C : polinomul $P(x)$ admite pe 1 exact ca rădăcină dublă.

Să se exprime evenimentele B și C prin intermediul evenimentelor A_i.

8. Rezistențele R_i montate în schema electrică din figura 2 au fost extrase fiecare la întîmplare din cîte un lot de rezistențe L_i, $i = \overline{1,7}$. Fiecare lot conține rezistențe bune și defecte. Fie A_i evenimentul ca rezistența R_i extrasă din lotul L_i să fie bună $i = \overline{1,7}$ și B evenimentul care constă în trecerea curentului electric prin galvanometru.

Să se exprime evenimentele B și $\bar{B}$ cu ajutorul evenimentelor A_i.

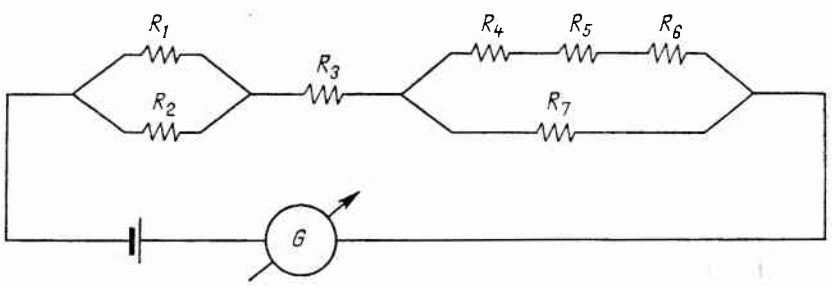


Fig. 2

9. Să se arate că:

a) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ *)

b) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ *)

*) Proprietatea de distributivitate a operației $\cup$ față de operația $\cap$ și a operației $\cap$ față de operația $\cup$.

10. Să se arate că:

a) $A \cup A = A$ *)

b) $A \cup (B \cap A) = A$ **)

$A \cap A = A$ *)

$A \cap (B \cup A) = A$ **)

11. Să se găsească în funcție de evenimentele A și B evenimentul C din relația:

$$\overline{(C \cup A)} \cup \overline{(C \cup \bar{A})} = B$$

12. Să se arate că

a) $\overline{A \cup B \cup C} = \bar{A} \cap \bar{B} \cap \bar{C}$.

b) $\overline{A \cap B \cap C} = \bar{A} \cup \bar{B} \cup \bar{C}$.

c) $\overline{\bigcup_{i=1}^{n} A_i} = \bigcap_{i=1}^{n} \overline{A_i}$.

d) $\overline{\bigcap_{i=1}^{n} A_i} = \bigcup_{i=1}^{n} \overline{A_i}$.

13. Să se arate că

a) $A \cup \left(\bigcap_{i=1}^{n} B_i\right) = \bigcap_{i=1}^{n} (A \cup B_i)$

b) $A \cap \left(\bigcup_{i=1}^{n} B_i\right) = \bigcup_{i=1}^{n} (A \cap B_i)$.

14. Să se arate că

$$A - \bigcap_{i=1}^{n} B_i = \bigcup_{i=1}^{n} (A - B_i)$$

15. Să se arate că

a) $A - B = A - (A \cap B)$.

b) $A - B = (A \cup B) - B$.

c) $A - (A - C) = A \cap C$.

d) $(A \cup B) - C = (A - C) \cup (B - C)$.

e) $A \cap (B - C) = (A \cap B) - (A \cap C)$.

16. Să se arate că dacă evenimentele A și C sînt incompatibile, atunci

$$A - (B - C) = A - B.$$

17. Să se arate că

a) $(A \cup B) \cap (A \cup \bar{B}) \cap (\bar{A} \cup B) \cap (\bar{A} \cup \bar{B}) = \emptyset$.

b) $(A \cap B) \cup (A \cap \bar{B}) \cup (\bar{A} \cap B) \cup (\bar{A} \cap \bar{B}) = E$.

---

*) Proprietatea de idempotență.

**) Proprietatea de absorbție.

18. Se aruncă o monedă. Să se scrie cîmpul de evenimente atașat acestei experiențe.

19. Să se scrie cîmpul de evenimente atașat experienței de aruncare a unui zar.

20. Fie A, B, C relee electrice sau rețele formate din relee, care se pot lega în serie sau în paralel. Două rețele sînt echivalente dacă, în același timp prin ambele poate trece curentul electric sau nu poate trece curentul. Echivalența dintre două relații o notăm prin semnul „=". $A \cup B$ înseamnă legarea în paralel, iar $A \cap B$ legarea în serie a rețelelor A și B. $\bar{A}$ înseamnă rețea prin care nu trece curentul ori de cîte ori trece curentul prin A și reciproc. $\emptyset$ este rețeaua prin care curentul nu trece niciodată, iar E rețeaua prin care curentul trece totdeauna. *)

Să se verifice proprietățile

$$(A \cup B) \cap C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$$

și

$$(A \cap B) \cup C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$$

construindu-se și schemele respective.

Propunem cititorului ca prin același procedeu să verifice și alte egalități care apar în exercițiile precedente.

§ 4. Indicații și răspunsuri

1. a) Probele sînt:
pe ambele monede apare stema;
pe ambele apare banul;
pe moneda de 5 apare stema și pe cea de 10 apare banul;
pe moneda de 5 apare banul și pe cea de 10 stema, simbolic: (S, S) (B, B); (S, B); (B, S).

b) A_1 și A_2 sînt evenimente aleatoare deoarece la o efectuare a experienței A_1 și A_2 se pot sau nu realiza, sînt evenimente compuse deoarece fiecare se poate realiza prin două probe. Evenimentele A_1 și A_2 sînt compatibile între ele, deoarece se pot realiza simultan (prin proba (S, S)).

2. A și B sînt evenimente compatibile, deoarece se pot produce în același timp și anume cînd extragem din urnă două bile albe. A și B sînt evenimente compuse.

3. Evenimentele A și B sînt contrare deoarece dacă se realizează A nu se va realiza B și reciproc. Evenimentele A și B sînt și incompatibile.

4. a) evenimentul sigur, b) evenimentul imposibil.

*) Interpretarea rețelelor ca evenimente a permis aplicarea proprietăților unui cîmp de evenimente în teoria schemelor cu contacte și relee.

5. a) Nu.

b) $\bar{A} \cap \bar{B} = \overline{A \cup B}$.

6. Numărul natural ales trebuie să se termine cu cifra **5.**

7. $B = A_1 \cap A_2 \cap A_3$,

$C = (A_1 \cap A_2) \cap \bar{A}_3$.

8. $B = (A_1 \cup A_2) \cap A_3 \cap [(A_4 \cap A_5 \cap A_6) \cup A_7)]$,

$\bar{B} = (\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2) \cup \bar{A}_3 \cup [(\bar{A}_4 \cup \bar{A}_5 \cup \bar{A}_6) \cap \bar{A}_7)]$.

9. *) a) Realizarea evenimentului $A \cup (B \cap C)$ înseamnă realizarea evenimentului A sau a evenimentului B și C, ceea ce implică atît realizarea evenimentului A sau B cît și realizarea evenimentului A sau C, deci a evenimentului $(A \cup B) \cap (A \cup C)$ prin urmare $A \cup (B \cap C) \subset (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

Reciproc se arată că $(A \cup B) \cap (A \cup C) \subset A \cup (B \cap C)$, de unde deducem $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

b) Se demonstrează analog.

10. a) Se arată implicațiile $A \cup A \subset A$ și $A \subset A \cup A$ și respectiv $A \cap A \subset A$ și $A \subset A \cap A$.

b) La fel ca la punctul a) pentru evenimentele $A \cup (B \cap A)$ și A respectiv $A \cap (B \cup A)$ și A.

11. Se trece la evenimentele contrare și se folosește distributivitatea și absorbția. Se obține $C = \bar{B}$.

12. a) Evenimentul $A \cup B \cup C$ înseamnă realizarea cel puțin a unuia dintre evenimentele A, B, C; contrariul său, $\overline{A \cup B \cup C}$ înseamnă realizarea lui $\bar{A} \cap \bar{B} \cap \bar{C}$, deci

$$\overline{A \cup B \cup C} \subset \bar{A} \cap \bar{B} \cap \bar{C}$$

La fel se arată și implicația contrară, de unde rezultă egalitatea dorită.

b) Se procedează ca la punctul a).

c) d) Se folosește inducția completă. Pentru cazul a două și trei evenimente relațiile se verifică (exercițiul 11, § 2, și respectiv punctele a) și b) din această problemă).

Se presupune adevărată relația pentru $(n-1)$ evenimente și apoi se demonstrează pentru n evenimente.

13. Se demonstrează prin inducție folosind proprietățile de distributivitate ale operațiilo $\cup$ și $\cap$.

14. $A - \bigcap_{i=1}^{n} B_i = A \cap \overline{(B_1 \cap B_2 \cap \ldots \cap B_n)} =$

$$= \bigcup_{i=1}^{n} (A \cap \bar{B}_i) = \bigcup_{i=1}^{n} (A - B_i).$$

---

*) Interpretînd evenimentele ca fiind mulțimile de probe prin care se realizează rezolvarea acestui exercițiu, precum și a celor ce urmează de același tip, revine la a demonstra egalitatea de mulțimi. Pentru a obișnui pe cititor cu raționamentul propriu teoriei probabilităților, am preferat demonstrațiile pe care le indicăm.

15. a) Realizarea evenimentului $A - B$ înseamnă realizarea lui A și nerealizarea lui B, deci nu se realizează nici $A \cap B$, prin urmare se realizează $A - (A \cap B)$ de unde rezultă că $A - B \subset A - (A \cap B)$.

Reciproc, realizarea lui $A - (A \cap B)$ înseamnă realizarea evenimentului A și nerealizarea evenimentului $A \cap B$, deci nerealizarea lui B, și, prin urmare, realizarea evenimentului $A - B$. Deci

$$A - (A \cap B) \subset A - B$$

b) și c) în mod analog ca la punctul a).

d) Evenimentul $(A \cup B) - C$ înseamnă realizarea lui $A \cup B$ și nerealizarea lui C, deci realizarea lui $(A - C) \cup (B - C)$, prin urmare

$$(A \cup B) - C \subset (A - C) \cup (B - C).$$

Reciproc se arată că

$$(A - C) \cup (B - C) \subset (A \cup B) - C$$

de unde rezultă

$$(A \cup B) - C = (A - C) \cup (B - C).$$

e) Se arată în mod analog ca la punctul d).

16. Avem

$$A - (B - C) = A - (B \cap \bar{C}) = A \cap \overline{(B \cap \bar{C})} = A \cap (\bar{B} \cup \bar{\bar{C}}) = A \cap (\bar{B} \cup C) =$$
$$= (A \cap \bar{B}) \cup (A \cap C) = A - B, \text{ deoarece } A \cap C = \emptyset.$$

17. a) Se aplică proprietatea de distributivitate și avem $[A \cup (B \cap \bar{B})] \cap [\bar{A} \cup (B \cap \bar{B})] =$
$= (A \cup \emptyset) \cap (\bar{A} \cup \emptyset) = A \cap \bar{A} = \emptyset$.

b) În mod analog ca la punctul a).

18. Notăm cu B și S evenimentele de apariție a banului respectiv a stemei. Avem

$$\{E, K\} = \{\emptyset, B, S, E\} \text{ unde } E = \{B, S\}.$$

Sînt $2^2 = 4$ evenimente.

19. Cîmpul de evenimente va fi

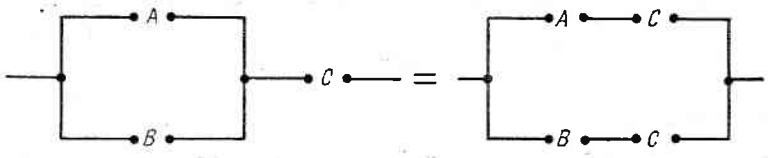
$$\{E, K\} = \{\emptyset, \{k\}; \{i, j\}; \{i, j\ k,\}; \{i, j, k, l\}; \{i, j, k, l, m\}, E\},$$

aici i, j, k, l, m iau independent toate valorile de la 1 la 6 (vezi restricția făcută la problema 15, punctul a), § 2). Am notat cu $\{k\}$ apariția feței cu numărul k, cu $\{i, j\}$ evenimentul care arată că a ieșit sau fața cu i puncte sau fața cu j puncte, adică $\{i, j\}, = \{i\} \cup \{j\}$ etc.

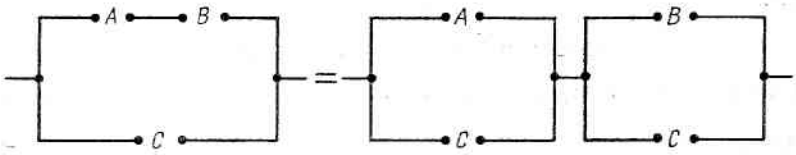
Sînt $1 + \sum_{s=1}^{6} C_6^s = 2^6 = 64$ evenimente.

20. Se constată direct că rețelele R_1 și R_2 sînt echivalente, în sensul că prin ambele rețele curentul trece sau nu trece în același timp, unde R_1 este rețeaua pe care o obținem legînd

în paralel pe A și B și pe aceasta din urmă în serie cu C, iar R_2 este rețeaua pe care o obținem legînd în paralel pe A și C și în paralel pe B și C și aceste două rețele din urmă le legăm în serie; deci $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$. Analog se arată a doua egalitate. Se obțin schemele din figura 3.



$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$$



$$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$$

Fig. 3

Capitolul II

CÎMP DE PROBABILITATE FINIT

§ 1. Noțiuni de bază. Definiții și proprietăți

1. Definiția clasică a probabilității

Să considerăm o experiență cu n evenimente elementare (deci cu n probe) *egal posibile*, și fie A un eveniment oarecare (atașat experienței), care se poate realiza prin m probe, $m \leqslant n$.

Definiție. Se numește *probabilitatea evenimentului* A, numărul

$$P(A) = \frac{m}{n},$$

adică raportul dintre numărul cazurilor favorabile realizării lui A și numărul cazurilor egal posibile.

Observație. Definiția clasică a probabilității se poate folosi deci numai pentru experiențele cu evenimente elementare egal posibile. Pentru calcularea probabilității unui eveniment oarecare A, trebuie să determinăm numerele de:

— cazuri favorabile, adică numărul de elemente din mulțimea de probe ce se atașează evenimentului A,

— cazuri posibile, adică numărul de elemente din mulțimea totală de probe ce se atașază evenimentului sigur E,

— probabilitatea $P(A)$ fiind raportul acestor două numere.

Probabilitatea unui eveniment elementar al unei astfel de experiențe este $\frac{1}{n}$ (n fiind numărul probelor) și aceeași pentru toate evenimentele elementare; deoarece pentru orice eveniment elementar numărul cazurilor favorabile este egal cu 1.

Probabilitatea unui eveniment se bucură de următoarele proprietăți:

1. $0 \leqslant P(A) \leqslant 1$; în adevăr $0 \leqslant m \leqslant n$.
2. $P(E) = 1$; $m = n$.
3. $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ dacă evenimentele A și B sînt incompatibile, adică $A \cap B = \emptyset$.
4. $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$.

5. $P(\emptyset) = 0$.

6. $P(A) \leqslant P(B)$ dacă $A \subset B$.

2. Definiția axiomatică a probabilității*)

O probabilitate P definită pe cîmpul de evenimente $\{E, K\}$ este o funcție care asociază fiecărui eveniment $A \in \{E, K\}$ un număr real $P(A)$ care satisface la următoarele axiome:

1) $P(A) \geqslant 0$ pentru orice eveniment $A \in \{E, K\}$,

2) $P(E) = 1$, E fiind evenimentul sigur,

3) $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ pentru orice A, $B \in \{E, K\}$ cu $A \cap B = \emptyset$.

Axioma 3 se extinde prin recurență la orice număr finit de evenimente incompatibile două cîte două, deci dacă $A_i \cap A_j = \emptyset$ $i \neq j$, $i, j = \overline{1,n}$, atunci

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i).$$

Se va observa că definiția clasică a probabilității satisface toate axiomele definiției axiomatice.

3. Cîmp de probabilitate finit

Un *cîmp de probabilitate* este un cîmp de evenimente $\{E, K\}$ înzestrat cu o probabilitate P; se notează cu $\{E, K, P\}$. Ne ocupăm aici numai de *cîmpuri de probabilitate finite*, adică acelea pentru care cîmpul de evenimente este o mulțime finită de evenimente.

Un *sistem complet de evenimente* este o mulțime de evenimente, A_k, $k = \overline{1, m}$ care satisfac la următoarele condiții:

1. $A_k \neq \emptyset$, $k = \overline{1,m}$.

2. $A_k \cap A_j = \emptyset$ $k \neq j$; $k, j = \overline{1,m}$.

3. $\bigcup_{k=1}^{m} A_k = E$.

Urmează că dacă evenimentele A_k, $k = \overline{1,m}$ formează un sistem complet de evenimente atunci

$$1 = P(E) = P\left(\bigcup_{k=1}^{m} A_k\right) = \sum_{k=1}^{m} P(A_k).$$

Observație. Mulțimea tuturor evenimentelor elementare atașată unei experiențe formează un sistem complet de evenimente.

4. Probabilități condiționate

Fie B un eveniment cu $P(B) > 0$.

*) Această definiție axiomatică a probabilității a fost dată în anul 1929 de matematicianul sovietic N. A. Kolmogorov (n. 1903).

Se numește *probabilitatea evenimentului A condiționat de evenimentul B*, numărul

$$(1)\quad P_B(A) = P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)},\quad P(B) > 0.$$

Dacă $P(A) > 0$ se poate defini în mod analog probabilitatea evenimentului B condiționată de evenimentul A, deci

$$(2)\quad P_A(B) = P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)},\quad P(A) > 0.$$

Din formulele (1) și (2) obținem

$$P(A \cap B) = P(B) \cdot P_B(A),\quad P(A \cap B) = P(A) \cdot P_A(B)$$

și

$$P(A) \cdot P_A(B) = P(B) \cdot P_B(A)$$

formulă care leagă probabilitățile condiționate reciproc de două evenimente.

Probabilitatea condiționată $P(A/B)$ are următoarea interpretare: este probabilitatea evenimentului A presupunînd că evenimentul B s-a realizat. Din compararea probabilităților $P(A)$ și $P(A/B)$ se poate vedea dacă realizarea evenimentului B influențează sau nu realizarea evenimentului A.

5. Evenimente independente

Două evenimente A_1 și A_2 sînt independente dacă

$$P(A_1 \cap A_2) = P(A_1) \cdot P(A_2).$$

Dacă $P(A_1 \cap A_2) \neq 0$ și evenimentele A_1 și A_2 sînt independente atunci

$$P_{A_2}(A_1) = P(A_1) \text{ și } P_{A_1}(A_2) = P(A_2)$$

și reciproc dacă $P_{A_2}(A_1) = P(A_1)$ atunci evenimentele A_1 și A_2 sînt independente.

Evenimentele A_k, $k = \overline{1, n}$ sînt independente dacă

$$P(A_{k_1} \cap \ldots \cap A_{k_s}) = P(A_{k_1}) \ldots P(A_{k_s}),$$

pentru orice indici $1 \leqslant k_1 < \ldots < k_s \leqslant n$.

Dacă evenimentele A_k, $k = \overline{1, n}$ sînt independente atunci și evenimentele $B_k \in \{A_k, \bar{A}_k\}$, $k = \overline{1, n}$ sînt independente.

Dacă evenimentele A_k, $k = \overline{1, n}$ sînt independente atunci

$$P\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) = 1 - P\left(\overline{\bigcup_{k=1}^{n} A_k}\right) = 1 - P\left(\bigcap_{k=1}^{n} \bar{A}_k\right) = 1 - \prod_{k=1}^{n} P(\bar{A}_k) =$$

$$= 1 - \prod_{k=1}^{n} (1 - P(A_k)).$$

6. Formule pentru calcularea unor probabilități

a) *Probabilitatea unei reuniuni de evenimente*

Se demonstrează prin inducție formula:

$$(3)\quad P\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) = \sum_{k=1}^{n} P(A_k) - \sum_{j<k} P(A_j \cap A_k) + \sum_{i<j<k} P(A_i \cap A_j \cap A_k) + \\ + \ldots + (-1)^{n-1} P\left(\bigcap_{k=1}^{n} A_k\right)$$

Pentru $k = 2$, formula (3) se reduce la:

$$P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2).$$

Dacă evenimentele A_k, $k = \overline{1, n}$ sînt incompatibile două cîte două, atunci formula (3) se reduce la

$$P\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) = \sum_{k=1}^{n-1} P(A_k).$$

Dacă evenimentele sînt independente atunci formula (3) devine

$$P\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) = \sum_{k=1}^{n} P(A_k) - \sum_{j<k} P(A_j) \cdot P(A_k) + \sum_{i<j<k} P(A_i) \cdot P(A_j) \cdot P(A_k) + \\ + \ldots + (-1)^{n-1} \cdot P(A_1) \ldots P(A_n).$$

b) *Probabilitatea unei intersecții de evenimente*

Se demonstrează prin inducție că dacă $P\left(\bigcap_{k=1}^{n-1} A_k\right) \neq 0$, atunci are loc formula

$$(4)\quad P\left(\bigcap_{k=1}^{n} A_k\right) = P(A_1) \cdot P(A_2/A_1) \cdot P(A_3/A_1 \cap A_2) \ldots P(A_n/A_1 \cap \ldots \cap A_{n-1}).$$

Pentru $k = 2$, formula (4) se reduce la

$$P(A_1 \cap A_2) = P(A_1) \cdot P(A_2/A_1).$$

Dacă evenimentele A_k, $k = \overline{1, n}$ sînt independente atunci formula (4) se reduce la

$$P\left(\bigcap_{k=1}^{n} A_k\right) = \prod_{k=1}^{n} P(A_k).$$

c) *Probabilitatea unei diferențe de evenimente*

Avem

$$P(A - B) = P(A) - P(A \cap B).$$

Dacă $B \subset A$, atunci

$$P(A - B) = P(A) - P(B).$$

d) *Formula probabilității totale*

Dacă A_k, $k = \overline{1, n}$ este un sistem complet de evenimente și B este un eveniment oarecare, atunci are loc *formula probabilității totale:*

$$P(B) = P(A_1) \cdot P(B/A_1) + P(A_2) \cdot P(B/A_2) + \ldots + P(A_n) \cdot P(B/A_n)$$

e) *Formula lui Bayes* *)

Dacă A_k, $k = \overline{1, n}$ este un sistem complet de evenimente și B un eveniment oarecare, atunci are loc *formula lui Bayes;* cunoscută încă sub numele de *formula ipotezelor:*

$$P(A_j/B) = \frac{P(A_j)P(B/A_j)}{\sum_{k=1}^{n} P(A_k)P(B/A_k)}; \quad j = \overline{1, n}.$$

Această formulă se aplică în următoarea situație: În urma unei experiențe poate apărea un eveniment B, dar acest eveniment poate apărea ca efect a n evenimente $A_1, \ldots, A_n$ care formează un sistem complet de evenimente (adică B poate apărea odată cu unul și numai unul dintre evenimentele A_k, $k = \overline{1, n}$). Se cunosc probabilitățile evenimentelor $A_1, \ldots, A_n$ (care se mai numesc *probabilități a priori* ale evenimentelor A_k) și probabilitatea de apariție a evenimentului B ca efect al evenimentului A_k, deci $P(B/A_k)$, $k = \overline{1, n}$. Presupunînd că în urma experienței a apărut evenimentul B, formula lui Bayes ne permite să aflăm pentru fiecare $k = \overline{1, n}$ în parte, probabilitatea ca evenimentul B să fi apărut din cauza evenimentului A_k (odată cu A_k), adică probabilitatea $P(A_k/B)$ (probabilitățile $P(A_k/B)$ $k = \overline{1, n}$, se mai numesc și *probabilități a posteriori* ale evenimentelor $A_1, \ldots A_n$). Comparînd probabilitățile $P(A_k/B)$ și $P(A_k)$ aflăm cum se schimbă probabilitatea evenimentului A_k, atunci cînd se știe că evenimentul B a avut loc.

7. Scheme clasice de probabilitate

a) *Schema lui Bernoulli* **)

În urma efectuării unei experiențe poate apărea evenimentul A cu probabilitatea p, sau contrariul său evenimentul $\bar{A}$ cu probabilitatea $q = 1 - p$. Se repetă experiența de n ori, în condiții identice. Probabilitatea $P(n; m)$ ca în cele n experiențe, evenimentul A să apară de m ori, este

$$P(n; m) = C_n^m p^m q^{n-m}.$$

Deoarece probabilitatea $P(n; m)$ este coeficientul lui x^m din dezvoltarea binomului $(q + px)^n$, această schemă se mai numește și *schema binomială.*

*) Th. Bayes (m. 1763) abate englez.

**) Jacob (Jacques) Bernoulli (1654—1705) primul matematician din cunoscuta familie de matematicieni elvețieni Bernoulli.

Schema lui Bernoulli poate fi realizată printr-o urnă cu bile de două culori (albe și negre), se extrage pe rînd cîte o bilă din urnă, dar de fiecare dată bila extrasă se pune înapoi în urnă, motiv pentru care aceeași schemă este cunoscută și sub numele de *schema bilei revenite.*

b) *Schema lui Bernoulli cu mai multe stări*

În urma unei experiențe poate apărea unul și numai unul dintre evenimentele A_k, $k = \overline{1, s}$ care formează un sistem complet de evenimente.

Fie $p_k = P(A_k)$, $k = \overline{1, s}$, atunci $\sum_{k=1}^{s} p_k = 1$.

Se repetă experiența de n ori, în condiții identice. Probabilitatea $P(n; m_1, ..., m_s)$ că în cele n experiențe evenimentul A_k să apară de m_k ori, $k = \overline{1, s}$, este

$$P(n; m_1, ..., m_s) = \frac{n!}{m_1! \dots m_s!} p_1^{m_1} \dots p_s^{m_s}; \quad \sum_{k=1}^{s} m_k = n.$$

Această schemă este cunoscută și sub numele de *schema polinomială.*

c) *Schema lui Poisson* *)

Se fac n experiențe independente. În urma experienței de rang k, poate apărea evenimentul A cu probabilitatea p_k sau evenimentul $\bar{A}$ cu probabilitatea $q_k = 1 - p_k$, $k = \overline{1, n}$. Probabilitatea P_m ca în cele n experiențe evenimentul A să apară de m ori este coeficientul lui x^m din polinomul

$$P(x) = (p_1 x + q_1)(p_2 x + q_2) \dots (p_n x + q_n) = P_n x^n + \dots + P_m x^m + \dots + P_0.$$

Schema lui Poisson se poate realiza printr-un șir de n urne cu bile de două culori (albe și negre) cu compoziții diferite. Se extrage pe rînd cîte o bilă din fiecare urnă.

Observație. Schema lui Bernoulli se poate obține ca un caz particular al schemei lui Poisson, cînd $p_1 = \dots = p_n$.

d) *Schema bilei neîntoarse*

Dintr-o urnă cu a bile albe și b bile negre se extrag n bile, $n \leqslant a + b$. Probabilitatea $P_{a,b}(\alpha, \beta)$ ca α din bilele extrase să fie albe și β negre, $\alpha + \beta = n$, este

$$P_{a,b}(\alpha,\beta) = \frac{C_a^{\alpha} C_b^{\beta}}{C_{a+b}^{\alpha+\beta}},$$

*) Denis Poisson (1781—1840) celebru matematician francez.

unde

$$\mathcal{C}_n^m = \begin{cases} \dfrac{n!}{m!(n-m)!} & \text{dacă } m < n \\ 1 & \text{dacă } m = n \text{ sau } m = 0. \\ 0 & \text{dacă } m > n. \end{cases}$$

Deoarece, extragerea a n bile din urnă revine la a extrage de n ori cîte o bilă, fără însă să se repună bila extrasă înapoi în urnă, justifică denumirea acestei scheme.

§ 2. Exerciții și probleme rezolvate

1. *Dintr-o urnă cu* 15 *bile numerotate de la* 1 *la* 15 *se extrage la întîmplare o bilă. Se cere probabilitatea ca numărul înscris pe bila extrasă să fie:*

a) *un număr prim*

b) *un număr par*

c) *un număr divizibil prin* 3.

Rezolvare. Numărul *cazurilor posibile* pentru fiecare punct din problemă este același și anume 15.

Să găsim cazurile favorabile pentru fiecare punct în parte:

a) *cazuri favorabile:* 6; numerele 2, 3, 5, 7, 11, 13 deci $P = \frac{6}{15} = \frac{2}{5}$.

b) *cazuri favorabile:* 7; numerele 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, deci $P = \frac{7}{15}$.

c) *cazuri favorabile:* 5; numerele 3, 6, 9, 12, 15 deci $P = \frac{5}{15} = \frac{1}{3}$.

2. *Cele* 26 *litere ale alfabetului scrise fiecare pe un cartonaș sînt introduse într-o urnă. Se cere probabilitatea ca extrăgînd la întîmplare de patru ori cîte un cartonaș și așezîndu-le în ordinea extragerii să obținem cuvîntul P A C E.*

Rezolvare. Cazuri favorabile: 1 și anume să scoatem la cele 4 extracții literele P, A, C, E și în această ordine.

— *Cazuri posibile:* $26 \cdot 25 \cdot 24 \cdot 23$. În adevăr, drept primă literă poate fi extrasă oricare din cele 26 litere din urnă, deci pentru prima extracție sînt 26 cazuri posibile. Pentru a doua literă rămîn 25 cazuri posibile, fiecare caz se poate asocia cu cele 26 cazuri posibile pentru extragerea primei litere, deci obținem în total $26 \cdot 25$ cazuri posibile pentru extragerea primelor două litere. Sînt 24 cazuri posibile pentru extragerea celei de a treia litere (în urnă după primele două extracții au mai rămas 24 litere) care combinate cu toate cazurile posibile de extragere a primelor două litere, dau $26 \cdot 25 \cdot 24$ cazuri posibile pentru extragerea primelor trei litere. În sfîrșit pentru ultima literă rămîn

23 cazuri posibile care combinate cu cele $26 \cdot 25 \cdot 24$ cazuri posibile de extragere a primelor trei litere, dau $26.25.24.23$ cazuri posibile de extragere a celor 4 litere, deci $P = \frac{1}{26 \cdot 25 \cdot 24 \cdot 23}$

Observație. Numărul cazurilor posibile poate fi obținut raționînd și altfel și anume; a extrage pe rînd de 4 ori cîte o literă și a le așeza în ordinea extragerii este tot una cu a extrage deodată 4 litere, dar în formarea grupelor trebuie să ținem seama și de ordinea literelor, deci numărul extragerilor posibile este dat de numărul grupelor de 4 obiecte care se pot forma din 26 de obiecte, două grupe diferind cel puțin prin natura unui obiect sau prin ordinea obiectelor, deci este $\mathcal{A}_{26}^{4} = 26 \cdot 25 \cdot 24 \cdot 23$.

• **3.** *Zece bile numerotate de la* 1 *la* 10 *se așază la întîmplare una după alta într-un șir. Care este probabilitatea ca după bila numerotată cu* 5 *să urmeze bila numerotată cu* 6.

Rezolvare — Cazurile posibile sînt $\mathcal{P}_{10} = 10!$

— *Cazuri favorabile* $9 \cdot 8!$ În adevăr bila numerotată cu 5 poate fi așezată în oricare din primele 9 locuri, după ea urmînd bila numerotată cu 6, sînt deci 9 cazuri diferite de așezări ale bilelor 5 și 6 una după alta, celelalte 8 bile rămase pot fi așezate pe cele 8 locuri rămase în $8!$ moduri diferite, deci fiecărui caz de așezare a bilelor 5 și 6 li se asociază cîte $8!$ moduri de așezare a celorlalte bile, deci în total sînt $9 \cdot 8!$ moduri diferite de așezare a bilelor cu condiția ca bilele 5 și 6 să fie așezate una după alta. Prin urmare $P = \frac{9 \cdot 8!}{10!} = \frac{1}{10}$.

• **4.** *Se aruncă două zaruri de* n *ori. Se cere probabilitatea ca dubla șase să apară cel puțin o dată.*

Rezolvare. În această problemă este mai ușor să calculăm probabilitatea evenimentului contrar, adică a evenimentului ca aruncînd de n ori două zaruri să nu apară nici o dată dubla șase.

— *Cazuri posibile:* $(36)^n$. În adevăr la fiecare aruncare a două zaruri sînt 36 de cazuri posibile, deoarece fiecare din cele 6 fețe ale primului zar se poate combina cu oricare din cele 6 fețe ale celui de al doilea zar, deci în total $6 \cdot 6 = 36$. În n aruncări a celor două zaruri sînt posibile $(36)^n$ cazuri diferite.

— *Cazuri favorabile:* $(35)^n$. În adevăr la fiecare aruncare a celor două zaruri sînt 35 cazuri favorabile (din cele 36 cazuri posibile trebuie să eliminăm cazul cînd la ambele zaruri apare 6) iar la n aruncări sînt $(35)^n$ cazuri favorabile.

Deci $Q = \left(\frac{35}{36}\right)^n$ iar $P = 1 - \left(\frac{35}{36}\right)^n$.

5. *Să se arate că probabilitatea de a se obține cel puțin un șase atunci cînd se aruncă un zar de patru ori este mai mare decît probabilitatea de a se obține cel puțin o dublă șase, atunci cînd se aruncă două zaruri de 24 de ori* *).

Rezolvare. Fie A evenimentul ca aruncînd de patru ori un zar să obținem cel puțin o dată șase puncte și B evenimentul ca aruncînd de 24 de ori două zaruri să apară cel puțin o dată dubla șase, avem, raționînd la fel ca în problema precedentă,

$$P(A) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^4 \simeq 0{,}5177,$$

$$P(B) = 1 - \left(\frac{35}{36}\right)^{24} \simeq 0{,}4914.$$

6. *Dintr-o urnă conținînd a bile albe și b bile negre se extrage, la întîmplare o bilă. Care este probabilitatea ca bila extrasă să fie albă? Dar neagră?*

Rezolvare. — Cazuri posibile: $a + b$

— *Cazuri favorabile* pentru extragerea unei bile albe: a deci $P = \frac{a}{a+b}$;

$Q = 1 - P = \frac{b}{a+b}$

7. *O urnă conține 4 bile albe și 6 bile negre. Se scoate o bilă care se pune deoparte, apoi se extrage încă o bilă din urnă.*

a) *Știind că prima bilă extrasă din urnă este albă care este probabilitatea ca a doua bilă extrasă să fie tot albă? Dar a doua bilă să fie neagră?*

---

*) Această problemă are o importanță istorică fiind prima problemă de probabilități rezolvată de Blaise Pascal (1623—1662) celebru matematician și fizician francez care împreună cu Pierre Fermat (1601—1665) celebru matematician francez a pus bazele calculului probabilităților.

Notă. Cavalerul de Méré, un mare jucător de zaruri din sec. XVII, a observat din experiența sa proprie că sînt mai multe șanse de cîștig dacă se pariază ca din patru aruncări ale unui zar să apară cel puțin un șase, decît dacă se pariază ca din 24 de aruncări a două zaruri să apară cel puțin o dată dubla de șase. De Méré a constatat că într-o serie lungă de pariuri de acest fel în primul caz frecvența de cîștig este mai mare decît 1/2 deci numărul jocurilor cîștigate este mai mare decît numărul jocurilor pierdute, rezultatul final fiind un cîștig pentru jucător, în timp ce în al doilea caz, rezultatul final este o pierdere pentru jucător. De Méré a considerat că această observație contrazice calculul matematic, deoarece 4 față de 6 (numărul cazurilor posibile cînd se aruncă un zar) este în același raport ca și 24 față de 36 (numărul cazurilor posibile cînd se aruncă două zaruri) și deci șansele de cîștig în ambele cazuri ar trebui să fie egale. De Méré a pus această problemă lui Pascal, care a rezolvat-o introducînd cu această ocazie definiția probabilității unui eveniment. Prima probabilitate este mai mare decît 1/2, în timp ce a doua este mai mică decît 1/2, ceea ce corespunde exact cu constatarea lui De Méré.

Dacă în al doilea caz, se cere ca din 25 de jocuri să apară cel puțin o dată dubla șase, atunci probabilitatea pentru acest caz devine mai mare ca 1/2 (v. probl. 10 § 3).

b) *Necunoscînd culoarea primei bile extrase, care este probabilitatea ca a doua bilă extrasă să fie albă? Dar neagră?*

Rezolvare: a) — *cazuri posibile:* $4 \cdot 9 = 36$. În adevăr pentru extragerea primei bile sînt posibile 4 cazuri (cîte bile albe sînt în urnă) iar pentru extragerea celei de a doua bile sînt posibile 9 cazuri (numărul bilelor rămase în urnă).

— *Cazuri favorabile:* $4 \cdot 3 = 12$, deoarece pentru prima extragere sînt 4 cazuri favorabile iar pentru a doua extragere 3 cazuri favorabile (înainte de a doua extragere în urnă sînt numai 3 bile albe), prin urmare: $P = \frac{12}{36} = \frac{1}{3}$.

Pentru ca a doua bilă extrasă să fie neagră, știind că prima bilă extrasă a fost albă sînt 36 cazuri posibile și $4 \cdot 6 = 24$ cazuri favorabile deci $Q = \frac{24}{36} = \frac{2}{3}$. Se poate obține direct Q, deoarece $Q = 1 - P$.

b) — *Cazuri posibile:* $10 \cdot 9 = 90$, deoarece sînt 10 cazuri posibile de extragere pentru prima bilă și fiecare caz se poate combina cu cele 9 cazuri posibile de extragere pentru a doua bilă, deci $10 \cdot 9 = 90$.

— *Cazuri favorabile:* $12 + 24 = 36$. În adevăr, dacă presupunem mai întîi că prima bilă extrasă este albă, atunci sînt patru cazuri favorabile de extragere pentru prima bilă și trei cazuri pentru a doua bilă; deci $4 \cdot 3 = 12$ cazuri favorabile. Presupunînd acum că prima bilă extrasă este neagră sînt 6 cazuri favorabile de extragere pentru prima bilă și 4 cazuri favorabile de extragere pentru a doua bilă, deci $6 \cdot 4 = 24$ cazuri favorabile în acest caz. În total $12 + 24 = 36$; deci $P' = \frac{36}{90} = \frac{2}{5}$. Pentru probabilitatea evenimentului ca a doua bilă să fie neagră, neștiind culoarea primei bile, un raționament analog ne dă $Q' = \frac{3}{5}$, sau direct $Q' = 1 - P'$.

Observație. Probabilitățile obținute la cele două puncte ale problemei sînt diferite, deoarece probabilitatea unui eveniment depinde esențial de complexul de condiții dat.

8. *Dintr-o urnă conținînd a bile albe și b bile negre se extrag k bile ($k < a + b$) care se pun la o parte, fără să se cunoască culoarea lor. Se extrage apoi încă o bilă. Care este probabilitatea ca această din urmă bilă să fie albă? Dar neagră?*

Rezolvare. Deoarece în problemă interesează ordinea în care se fac extragerile avem: — *Cazuri posibile:* $\mathcal{A}_{a+b}^{k+1} = (a + b)(a + b - 1) \ldots (a + b - k)$, deoarece din cele $a + b$ bile se pot extrage în $\mathcal{A}_{a+b}^{k+1}$ moduri diferite, grupe de cîte $k + 1$ bile ținîndu-se seama și de ordinea bilelor din grupă.

— *Cazuri favorabile:* $a\mathcal{A}_{a+b-1}^{k} = a\,(a+b-1)\ldots(a+b-k)$. În adevăr să observăm că ultima bilă extrasă (și care trebuie să fie albă) poate fi oricare din cele a bile albe, iar primele k bile se pot extrage în A_{a+b-1}^{k} moduri diferite, deci

$$P = \frac{a\mathcal{A}_{a+b-1}^{k}}{\mathcal{A}_{a+b}^{k+1}} = \frac{a}{a+b}$$

Analog se găsește că probabilitatea ca bila din extragerea $k+1$ să fie neagră este $Q = 1 - P = \frac{b}{a+b}$.

Observație. Probabilitățile de obținere a unei bile albe respectiv negre în a $k+1$ extragere sînt egale cu probabilitățile de extragere a unei bile albe respectiv negre în prima extragere, deci ca și cum nu s-ar fi extras în prealabil k bile din urnă (v. probl. 6).

9. *Zece mingi sînt puse la întîmplare în trei cutii, C_1, C_2, C_3. Care este probabilitatea ca în cutia C_1 să fie 3 mingi?*

Rezolvare. — *Cazuri posibile:* 3^{10}. În adevăr să presupunem că numerotăm mingile de la 1 la 10. Atunci prima minge poate fi distribuită în oricare din cele 3 cutii, deci sînt trei cazuri posibile, a doua minge poate fi și ea distribuită în oricare din cele 3 cutii, deci numai pentru două mingi sînt 3^2 cazuri posibile (deoarece fiecare caz posibil pentru prima minge se combină cu toate cazurile posibile pentru a doua minge). Judecînd la fel găsim că pentru trei mingi sînt 3^3 cazuri posibile, iar pentru 10 mingi 3^{10}.

— *Cazuri favorabile:* $\mathcal{C}_{10}^{3} \cdot 2^7$. Să presupunem că un grup de 3 mingi sînt introduse în prima cutie, avem însă $\mathcal{C}_{10}^{3}$ moduri diferite de alegere a unui grup de 3 mingi din cele 10 date. Cele 7 mingi rămase se pot distribui în cele două cutii rămase C_2 și C_3 în 2^7 moduri diferite (se judecă la fel ca pentru cazurile posibile) deci în total sînt $\mathcal{C}_{10}^{3} \cdot 2^7$ cazuri favorabile, prin urmare $P = \frac{\mathcal{C}_{10}^{3} \cdot 2^7}{3^{10}}$.

10. *Sînt distribuite la întîmplare n bile în N urne.*

a) *Care este probabilitatea ca într-o urnă specificată să avem k bile?*

b) *Să se arate că:*

$$\frac{\left(\frac{n}{N}\right)^k}{1.2\ldots k}\left(1-\frac{1}{N}\right)^{n-k}\left(1-\frac{k}{2n}\right)^{k-1} < P < \frac{\left(\frac{n}{N}\right)^k}{1\cdot 2\ldots k}\left(1-\frac{1}{N}\right)^{n-k}\left(1-\frac{k}{n}\right)^{\frac{k-1}{2}},$$

unde P este probabilitatea găsită la punctul a).

Rezolvare. a) — *Cazuri posibile:* N^n. În adevăr să presupunem că numerotăm bilele de la 1 la n. Atunci prima bilă poate fi distribuită în oricare din

cele N urne, a doua bilă poate fi și ea distribuită în oricare din cele N urne, deci dacă ar fi numai două bile am avea N^2 cazuri posibile (căci fiecare caz posibil pentru prima bilă se combină cu toate cazurile posibile pentru a doua bilă), fiind n bile avem N^n cazuri posibile.

b) *Cazuri favorabile* $\mathcal{C}_n^k (N-1)^{n-k}$. Să presupunem că un grup de k bile sînt introduse într-o urnă, avem însă $\mathcal{C}_n^k$ moduri diferite de alegere a acestui grup de k bile. Pentru cele $n-k$ bile rămase sînt $(N-1)^{n-k}$ moduri de distribuire a lor în cele $N-1$ urne rămase, deci în total sînt $\mathcal{C}_n^k (N-1)^{n-k}$ cazuri favorabile;

$$P = \frac{\mathcal{C}_n^k (N-1)^{n-k}}{N^n}$$

b) Putem scrie

$$P = \frac{\left(\frac{n}{N}\right)^k}{1 \cdot 2 \ldots k} \left(1 - \frac{1}{N}\right)^{n-k} M,$$

unde

$$M = \left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right) \ldots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right).$$

Fie acum $1 \leqslant h \leqslant k-1$, atunci,

$$(1) \quad \left(1 - \frac{h}{n}\right)\left(1 - \frac{k-h}{n}\right) = 1 - \frac{h}{n} + \frac{h(k-h)}{n^2} > 1 - \frac{k}{n}.$$

Pe de altă parte

$$h(k-h) \leqslant \frac{k^2}{4}$$

și deci

$$(2) \quad \left(1 - \frac{h}{n}\right)\left(1 - \frac{k-h}{n}\right) \leqslant \left(1 - \frac{k}{2n}\right)^2.$$

Din

$$M^2 = \prod_{h=1}^{k-1} \left(1 - \frac{h}{n}\right)\left(1 - \frac{k-h}{n}\right),$$

folosind inegalitățile (1) și (2) obținem

$$M < \left(1 - \frac{k}{2n}\right)^{k-1} \text{ și } M > \left(1 - \frac{k}{n}\right)^{\frac{k-1}{2}}$$

și, deci, dubla inegalitate dorită.

Se observă că atunci cînd numerele n, N și k sînt mari, aplicarea directă a formulei obținute pentru P la punctul a) este greoaie și în acest caz sînt preferabile aproximările găsite la punctul b).

11. *Considerăm n bile și N urne, $N > n$. Fiecare bilă se poate găsi în oricare din urne cu probabilitatea $\frac{1}{N}$. Să se găsească probabilitatea ca:*

a) *n urne determinate să conțină cîte o singură bilă.*

b) *oricare grupă de n urne din cele N să conțină cîte o singură bilă.* *)

Rezolvare. a) — *Cazuri posibile:* N^n (v. problema 10, punctul a).

— *Cazuri favorabile:* $n!$ În adevăr cele n bile pot fi așezate în n urne (cîte o bilă într-o urnă) în $\mathcal{P}_n$ moduri diferite (se așază n obiecte pe n locuri); de unde

$$P = \frac{n!}{N^n}.$$

b) *Cazuri posibile:* N^n

— *Cazuri favorabile:* $\mathcal{C}_N^n n!$ deoarece din cele N urne se pot alege în $\mathcal{C}_N^n$ moduri diferite, grupe de cîte n urne, iar pentru fiecare grupă de n urne sînt $n!$ cazuri (vezi punctul a), deci în total $\mathcal{C}_N^n\, n!$, de unde

$$P' = \frac{\mathcal{C}_n^N n!}{N^n} = \frac{N!}{N^n(N-n)!}.$$

12. *Zece elevi dintre care 5 fete și 5 băieți sînt așezați la întîmplare cîte doi într-o bancă. Se cere probabilitatea ca în fiecare bancă să fie un băiat și o fată.*

Rezolvare. — *Cazuri posibile:* $\frac{10!}{2^5}$, să numerotăm băncile de la 1 la 5. În prima bancă se pot așeza oricare din cele $\mathcal{C}_{10}^2$ perechi de elevi care se pot forma din cei 10 elevi, în banca a doua se pot așeza oricare din cele $\mathcal{C}_8^2$ perechi de elevi care se pot forma din cei 8 elevi rămași (deci numai pentru două bănci sînt $\mathcal{C}_{10}^2 \cdot \mathcal{C}_8^2$ cazuri posibile). Continuăm la fel; în banca a treia se pot așeza oricare din cele $\mathcal{C}_6^2$ perechi de elevi care se pot forma din cei 6 elevi rămași (după ce s-au așezat cîte o pereche de elevi în primele două bănci), în banca a patra se pot așeza oricare din cele $\mathcal{C}_4^2$ perechi de elevi care se pot forma din cei 4 elevi rămași, în sfîrșit în ultima bancă se poate așeza ultima pereche ($\mathcal{C}_2^2$) de elevi rămași, deci în total pentru cele 5 bănci sînt

$$\mathcal{C}_{10}^2 \cdot \mathcal{C}_8^2 \cdot \mathcal{C}_6^2 \cdot \mathcal{C}_4^2 \cdot \mathcal{C}_2^2 = \frac{10 \cdot 9}{2} \cdot \frac{8 \cdot 7}{2} \cdot \frac{6 \cdot 5}{2} \cdot \frac{4 \cdot 3}{2} \cdot \frac{2 \cdot 1}{2} = \frac{10!}{2^5},$$ cazuri posibile.

---

*) Această problemă și-a găsit aplicații interesante în fizica statistică.

— *Cazuri favorabile:* $(5!)^2$. În adevăr, în prima bancă se pot așeza oricare din cele 5^2 perechi (o fată și un băiat) care se pot forma grupînd în toate modurile posibile un băiat cu o fată din cei 10 elevi (sînt $5 \cdot 5 = 25$ posibilități). Apoi în a doua bancă se pot așeza oricare din cele 4^2 perechi (o fată și un băiat) care se pot forma grupînd în toate modurile posibile fiecare băiat din cei patru rămași cu fiecare fată din cele 4 rămase. Judecînd la fel se constată că pentru banca a treia există 3^2 posibilități de alegere a perechii care să se așeze; în banca a patra sînt 2^2 posibilități, iar în ultima bancă sînt 1^2 posibilități, deci în total sînt $5^2 \cdot 4^2 \cdot 3^2 \cdot 2^2 \cdot 1^2 = (5!)^2$ posibilități de aranjare a celor 10 elevi cîte doi într-o bancă, astfel că în fiecare bancă să fie o fată și un băiat. Deci probabilitatea căutată este

$$P = \frac{2^5 \cdot (5!)^2}{10!}.$$

13. *Cîte n bile de k culori diferite sînt introduse la întîmplare în n urne, în fiecare urnă introducîndu-se același număr de bile. Se cere probabilitatea ca fiecare urnă să conțină cîte o bilă din fiecare culoare.*

Rezolvare. Cazuri posibile: $\frac{(kn)!}{(k!)^n}$. Să numerotăm urnele de la 1 la n. În prima urnă se pot introduce oricare din cele $\mathcal{C}_{kn}^{k}$ grupe din cîte k bile luate din cele kn bile existente. În urna a doua se pot introduce oricare din cele $\mathcal{C}_{kn-k}^{k} = \mathcal{C}_{k(n-1)}^{k}$ grupe de cîte k bile care se pot forma din cele $kn - k$ bile rămase, după ce k bile au fost introduse în prima urnă. Pentru urna a treia sînt $\mathcal{C}_{k(n-2)}^{k}$ posibilități de alegere a unui grup de k bile din cele $kn - 2k$ rămase (după ce în primele două urne s-au introdus cîte k bile). Judecînd la fel mai departe se constată că pentru penultima urnă sînt $\mathcal{C}_{k(n-n+2)}^{k}$ posibilități, iar pentru ultima urnă $\mathcal{C}_{k(n-n+1)}^{k}$ posibilități deci combinînd în toate modurile posibile toate cazurile posibile pentru fiecare urnă în parte, obținem

$$\mathcal{C}_{kn}^{k} \cdot \mathcal{C}_{k(n-1)}^{k} \cdots \mathcal{C}_{k \cdot 2}^{k} \cdot \mathcal{C}_{k}^{k} = \frac{(kn)!}{(k!)^n} \text{ cazuri posibile.}$$

— *Cazuri favorabile:* $(n!)^k$. Urnele sînt numerotate de la 1 la n și să numerotăm și culorile de la 1 la k. Atunci în prima urnă se poate pune oricare din cele n^k grupe de cîte k bile unde formăm grupele alegînd în toate modurile posibile cîte o bilă din cele n bile de culoarea i; $i = \overline{1, k}$. Apoi în a doua urnă se poate pune oricare din cele $(n-1)^k$ grupe de cîte k bile, care se pot forma alegînd în toate modurile posibile cîte o bilă din cele $n - 1$ bile rămase de culoarea i, $i = \overline{1, k}$ (una a fost introdusă în prima urnă). În urna a treia se poate introduce oricare din cele $(n-2)^k$ grupe de cîte k bile, care se pot forma alegînd în toate modurile posibile cîte o bilă din cele $n - 2$ bile rămase,

de culoarea i, $i = \overline{1, k}$ ş.a.m.d. În total, combinînd în toate modurile posibile cazurile favorabile pentru fiecare din cele n urne, obţinem

$$n^k(n-1)^k(n-2)^k \ldots 1 = (n!)^k$$

cazuri favorabile. Deci probabilitatea căutată este

$$P = \frac{(k!)^n(n!)^k}{(kn)!}.$$

Observaţie. Problema precedentă se poate obţine ca un caz particular al acestei probleme şi anume luînd $k = 2$ şi $n = 5$.

Notă. Pentru valori mari ale lui n şi k, calcularea probabilităţii prin formula găsită este foarte greoaie. În acest caz se foloseşte aproximarea

$$n! \simeq n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}$$

cunoscută sub numele de *formula lui Stirling* *).

Obţinem astfel

$$P = \frac{(k!)^n(n!)^k}{(kn)!} \simeq \frac{k^{nk}e^{-nk}(\sqrt{2\pi k})^n\, n^{nk}e^{-nk}(\sqrt{2\pi n})^k}{(kn)^{nk}e^{-kn}\sqrt{2\pi kn}} = \frac{(2\pi)^{\frac{n+k-1}{2}}\, k^{\frac{n-1}{2}}\, n^{\frac{k-1}{2}}}{e^{kn}}.$$

Pentru efectuarea efectivă a calculelor se pot utiliza logaritmi. Formula lui Stirling se foloseşte în general, în aproximarea lui n! cînd n este mare.

14. *Să se arate că evenimentele*

$$A,\ \bar{A}\cap B,\ \overline{A\cup B}$$

formează un sistem complet de evenimente.

Rezolvare. Trebuie să arătăm mai întîi că evenimentele date sînt două cîte două incompatibile, pentru aceasta observăm că $\overline{A\cup B} = \bar{A}\cap\bar{B}$ şi atunci cum $A\cap\bar{A} = \emptyset$ rezultă imediat că $A\cap(\bar{A}\cap B) = \emptyset$, $A\cap(\overline{A\cup B}) = \emptyset$ şi $(\bar{A}\cap B)\cap(\overline{A\cup B}) = \emptyset$.

Apoi $A\cup(\bar{A}\cap B)\cup(\overline{A\cup B}) = A\cup(\bar{A}\cap B)\cup(\bar{A}\cap\bar{B}) =$
$= ((A\cup\bar{A})\cap(A\cup B))\cup(\bar{A}\cap\bar{B}) = [(A\cup\bar{A})\cup(\bar{A}\cap\bar{B})]\cap[(A\cup B)\cup(\bar{A}\cap\bar{B})] =$
$= E$, deci $P(A)+P(\bar{A}\cap B)+P(\overline{A\cup B}) = 1$.

15. *Dintr-o urnă cu n bile din care a albe, b negre, c roşii şi d verzi se extrage la întîmplare o bilă. Care este probabilitatea ca bila extrasă să fie albă sau roşie.*

Rezolvare. Fie A_1, A_2 evenimentul ca bila extrasă să fie albă respectiv roşie. A_1 şi A_2 sînt evenimente incompatibile.

---

*) J. Stirling (1692—1770), matematician scoţian.

În problemă se cere:

$$P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) = \frac{a}{n} + \frac{c}{n} = \frac{a+c}{n}.$$

16. *Trei trăgători trag simultan asupra aceleiași ținte. Probabilitatea ca fiecare trăgător să nimerească ținta este* $p_1 = 0{,}4$; $p_2 = 0{,}5$ *și respectiv* $p_3 = 0{,}7$. *Să se găsească probabilitatea ca ținta să fie nimerită exact o dată.*

Rezolvare. Fie A evenimentul ca ținta să fie nimerită exact o dată și A_1, A_2, A_3 evenimentele ca ținta să fie nimerită de primul, al doilea, respectiv al treilea trăgător. Atunci

$$A = (A_1 \cap \bar{A}_2 \cap \bar{A}_3) \cup (\bar{A}_1 \cap A_2 \cap \bar{A}_3) \cup (\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap A_3)$$

deci A este o reuniune de 3 evenimente incompatibile, prin urmare

$$P(A) = P(A_1 \cap \bar{A}_2 \cap \bar{A}_3) + P(\bar{A}_1 \cap A_2 \cap \bar{A}_3) + P(\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap A_3).$$

Deoarece evenimentele A_i, $\bar{A}_j$ $\bar{A}_k$ sînt independente $i \neq j \neq k$; $i, j, k = \overline{1,3}$ urmează

$$P(A) = P(A_1)P(\bar{A}_2)P(\bar{A}_3) + P(\bar{A}_1)P(A_2)P(\bar{A}_3) + P(\bar{A}_1)P(\bar{A}_2)P(A_3) =$$
$$= p_1(1-p_2)(1-p_3) + (1-p_1)p_2(1-p_3) + (1-p_1)(1-p_2)p_3 =$$
$$= 0{,}4 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}3 + 0{,}6 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}3 + 0{,}6 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}7 = 0{,}36$$

17. *Considerăm două urne* U_1, U_2 *cu următoarea compoziție*

Urna	*Nr. de bile albe*	*Nr. de bile negre*
U_1	a	b
U_2	c	d

Se extrage o bilă din urna U_1 *fără să-i vedem culoarea, se introduce în urna* U_2 *apoi se extrage o bilă din urna* U_2. *Care este probabilitatea ca bila extrasă din urna* U_2 *să fie albă?*

Rezolvare. Să notăm cu A evenimentul ca bila extrasă din urna U_2 să fie albă. Acest eveniment se poate realiza prin două modalități incompatibile între ele A_1 și A_2 și anume:

A_1: bila transferată în urna U_2 este albă și extragem din U_2 o bilă albă;

A_2: bila transferată în urna U_2 este neagră și extragem din U_2 o bilă albă

avem $A = A_1 \cup A_2$ și deci $P(A) = P(A_1) + P(A_2)$, deoarece $A_1 \cap A_2 = \emptyset$.

Dar $P(A_1) = \frac{a}{a+b} \cdot \frac{c+1}{c+d+1}$ deoarece evenimentul A_1 constă în realizarea a două evenimente independente și anume: extragem o bilă albă din urna U_1 $\left(\text{cu probabilitatea } \frac{a}{a+b}\right)$ o introducem în urna U_2 și apoi extragem din U_2 o bilă albă $\left(\text{cu probabilitatea } \frac{c+1}{c+d+1}\right)$.

Raționînd la fel obținem

$$P(A_2) = \frac{b}{a+b} \cdot \frac{c}{c+d+1}$$

de unde

$$P(A) = \frac{a(c+1)}{(a+b)(c+d+1)} + \frac{bc}{(a+b)(c+d+1)} = \frac{ac+bc+a}{(a+b)(c+d+1)}.$$

18. *Considerăm următorul joc. Într-o urnă sînt a bile albe și b bile negre; doi jucători extrag pe rînd cîte o bilă fără a repune bila extrasă în urnă. Cîștigă cel care extrage primul o bilă albă.*

a) *Care este probabilitatea ca să cîștige jucătorul care începe jocul?*

b) *Să se arate că*

$$1 + \frac{b}{a+b-1} + \frac{b(b-1)}{(a+b-1)(a+b-2)} + \ldots + \frac{b(b-1)\ldots 1}{(a+b-1)\ldots a} = \frac{a+b}{a}$$

oricare ar fi numerele naturale a și b.

Rezolvare. a) Fie A evenimentul care constă în faptul că primul jucător cîștigă și A_i evenimentul de a se extrage o bilă albă în extracția de rang i

Avem

$$A = A_1 \cup A_3 \cup A_5 \cup \ldots$$
$$\bar{A} = A_2 \cup A_4 \cup A_6 \cup \ldots$$

Evenimentele A_1, A_2, A_3,... fiind incompatibile, rezultă că

$$P(A) = P(A_1) + P(A_3) + P(A_5) + \ldots,$$

Dar

$$P(A_1) = \frac{a}{a+b},$$

$$P(A_3) = \frac{b}{a+b} \cdot \frac{b-1}{a+b-1} \cdot \frac{a}{a+b-2},$$

$$P(A_5) = \frac{b}{a+b} \cdot \frac{b-1}{a+b-1} \cdot \frac{b-2}{a+b-2} \cdot \frac{b-3}{a+b-3} \cdot \frac{a}{a+b-4}, \ldots$$

Deci

$$P(A) = \frac{a}{a+b}\left[1 + \frac{b(b-1)}{(a+b-1)(a+b-2)} + \right.$$
$$\left. + \frac{b(b-1)(b-2)(b-3)}{(a+b-1)(a+b-2)(a+b-3)(a+b-4)} + \ldots\right]$$

b) Rezultă din relația $P(A) + P(\bar{A}) = 1$, iar

$$P(\bar{A}) = \frac{a}{a+b}\left[\frac{b}{a+b-1} + \frac{b(b-1)(b-2)}{(a+b-1)(a+b-2)(a+b-3)} + \ldots\right],$$

deoarece

$$P(\bar{A}) = P(A_2) + P(A_4) + \ldots$$

iar

$$P(A_2) = \frac{b}{a+b} \cdot \frac{a}{a+b-1}$$

$$P(A_4) = \frac{b}{a+b} \cdot \frac{b-1}{a+b-1} \cdot \frac{b-2}{a+b-2} \cdot \frac{a}{a+b-3} \text{ etc.}$$

19. *Să se arate că dacă*

$$P(B/\bar{A}) = P(B/A)$$

atunci evenimentele A și B sînt independente.

Rezolvare. Avem:

$$P(B) = P(B \cap (A \cup \bar{A}) = P((B \cap A) \cup (B \cap \bar{A})) = P(B \cap A) + P(B \cap \bar{A}) =$$
$$= P(A)\, P(B/A) + P(\bar{A})\, P(B/\bar{A}) = (P(A) + P(\bar{A}))\, P(B/A) = P(B/A)$$

deci $$P(B) = P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

de unde $$P(A \cap B) = P(A)\, P(B).$$

20. *Într-o urnă sînt* 10 *bile dintre care* 6 *albe și* 4 *negre. Se extrage de două ori cîte o bilă din urnă fără să se repună bila extrasă înapoi în urnă. Fie A evenimentul ca a doua bilă extrasă să fie albă iar B evenimentul ca prima bilă extrasă să fie neagră. Să se arate că evenimentele A și B nu sînt independente.*

Rezolvare. Calculăm probabilitatea $P(A/B) = \frac{6}{9} \neq \frac{6}{10} = P(A)$, deci evenimentele A și B nu sînt independente.

21. *Un copil are* 3 *discuri vopsite pe ambele fețe în felul următor:*
un disc are ambele fețe vopsite în alb,
un disc are o față vopsită în alb și una în negru,
un disc are ambele fețe vopsite în negru.
Se alege un disc la întîmplare și se constată că una din fețe este albă. Care este probabilitatea ca și a doua față să fie tot albă?

Rezolvare. Fie A evenimentul ca prima față să fie albă și B evenimentul ca și a doua față a aceluiași disc să fie tot albă. Avem de calculat probabilitatea condiționată $P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$. Deoarece $P(A) = \frac{1}{2}$ (pentru că sînt 6 fețe posibile dintre care 3 albe) și $P(A \cap B) = \frac{1}{3}$ (sînt 3 discuri dintre care numai unul are ambele fețe albe), urmează că $P(B/A) = \frac{2}{3}$.

22. *Știind că* $P(A/B) = \frac{2}{5}$, $P(A/\bar{B}) = \frac{1}{10}$ *și* $P(B/A) = \frac{3}{5}$ *să se afle* $P(A)$ *și* $P(B)$.

Rezolvare. Pentru necunoscutele $P(A)$ și $P(B)$ se poate obține un sistem de două ecuații liniare în felul următor: considerăm relațiile

$$(3) \qquad \begin{cases} P(A) \cdot P(B/A) = P(B) \cdot P(A/B) \\ P(A) \cdot P(\bar{B}/A) = P(\bar{B}) \cdot P(A/\bar{B}) \end{cases}$$

Folosind relațiile $P(\bar{B}) = 1 - P(B)$ și $P(\bar{B}/A) = 1 - P(B/A)$ sistemul (3) devine

$$\begin{cases} P(B/A) \cdot P(A) - P(A/B) \cdot P(B) = 0 \\ (1 - P(B/A))\, P(A) + P(A/\bar{B}) \cdot P(B) = P(A/\bar{B}). \end{cases}$$

În cazul nostru avem

$$\begin{cases} \frac{3}{5} P(A) - \frac{2}{5} P(B) = 0 \\ \frac{2}{5} P(A) + \frac{1}{10} P(B) = \frac{1}{10} \end{cases}$$

pe unde

$$P(A) = \frac{2}{11} \text{ și } P(B) = \frac{3}{11}.$$

23. *Trei tunuri trag simultan asupra unei ținte. Probabilitățile de nimerire în țintă pentru cele trei tunuri sînt respectiv* $p_1 = 0{,}6$; $p_2 = 0{,}8$; $p_3 = 0{,}7$. *Se cere probabilitatea ca ținta să fie nimerită cel puțin o dată.*

Rezolvare. Fie A_1, A_2, A_3 evenimentele ca primul, al doilea, respectiv al treilea tun să nimerească ținta, se cere probabilitatea evenimentului $A_1 \cup A_2 \cup A_3$. Evenimentele A_k, $k = \overline{1,3}$ sînt independente și compatibile, deci

$$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) - P(A_1 \cap A_2) - P(A_1 \cap A_3) -$$
$$- P(A_2 \cap A_3) + P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) - P(A_1)\, P(A_2) -$$
$$- P(A_1)\, P(A_3) - P(A_2)\, P(A_3) + P(A_1)\, P(A_2)\, P(A_3) = 0{,}6 + 0{,}8 + 0{,}7 -$$
$$- 0{,}6 \cdot 0{,}8 - 0{,}6 \cdot 0{,}7 - 0{,}8 \cdot 0{,}7 + 0{,}6 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}7 = 0{,}976.$$

24. *O persoană scrie n scrisori la n corespondenți. Amestecă scrisorile și le introduce la întîmplare în n plicuri pe care erau scrise adresele dinainte. Care este probabilitatea ca cel puțin un destinatar să primească scrisoarea adresată lui* *).

*) Acest tip de problemă se numește problema concordanțelor sau a coincidențelor.

Rezolvare. Să notăm cu A_i evenimentul ca scrisoarea i să ajungă la destinatarul ei, $i = \overline{1, n}$; avem de calculat $P(A_1 \cup \ldots \cup A_n)$ unde evenimentele A_i sînt compatibile, deci se aplică formula

$$P(A_1 \cup \ldots \cup A_n) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{i<j}^{n} P(A_i \cap A_j) + \sum_{i<j<k}^{n} P(A_i \cap A_j \cap A_k) + \ldots +$$
$$+ (-1)^{n-1} P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right).$$

Dar,

$$P(A_i) = \frac{(n-1)!}{n!} = \frac{1}{n}, \quad i = \overline{1, n}.$$

În adevăr sînt $n!$ moduri egal posibile, diferite de introducere a celor n scrisori în cele n plicuri și deoarece una din scrisori trebuie să fie introdusă exact în plicul ei, $(n-1)!$ cazuri favorabile (celelalte $n-1$ scrisori se pot introduce în $(n-1)!$ moduri diferite în cele $n-1$ plicuri rămase).

Apoi $P(A_i \cap A_j) = \frac{(n-2)!}{n!} = \frac{1}{n(n-1)}$, oricare ar fi i și j cu $i < j$, $P(A_i \cap A_j \cap A_k) = \frac{(n-3)!}{n!} = \frac{1}{n(n-1)(n-2)}$ oricare ar fi i, j, k cu $i < j < k$, iar

$$P(A_1 \cap \ldots \cap A_n) = \frac{1}{n!}$$

Probabilitatea căutată este

$$P(A_1 \cup \ldots \cup A_n) = n\frac{1}{n} - C_n^2 \frac{1}{n(n-1)} + C_n^3 \frac{1}{n(n-1)(n-2)} + \ldots +$$
$$+ (-1)^{n-1} \frac{1}{n!} = 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n!}.$$

25. *Un lot de* 100 *de piese de mașină este supus controlului de calitate. Condiția ca acest lot să fie respins este găsirea a cel puțin unui rebut în cinci verificări consecutive. Care este probabilitatea ca lotul dat să fie respins, dacă el conține* 5% *piese rebut.*

Rezolvare. Este mai ușor să găsim probabilitatea evenimentului contrar, adică a evenimentului ca lotul, în urma controlului să fie acceptat. Să notăm cu A_i evenimentul ca a i-a piesă controlată $i = \overline{1, 5}$ să corespundă condițiilor cerute de STAS, atunci avem de calculat probabilitatea evenimentului $\bigcap_{i=1}^{5} A_i$. Evenimentele nefiind independente folosim formula

$$Q = P\left(\bigcap_{i=1}^{5} A_i\right) = P(A_1)P(A_2/A_1)\ P(A_3/A_1 \cap A_2)\ P(A_4/A_1 \cap A_2 \cap A_3) \cdot$$
$$\cdot P(A_5/A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4).$$

În cazul nostru

$P(A_1) = \frac{95}{100}$, $P(A_2/A_1) = \frac{94}{99}$, deoarece dacă evenimentul A_1 se realizează, în lot rămîn 99 piese dintre care 94 bune, $P(A_3/A_1 \cap A_2) = \frac{93}{98}$, $P(A_4/A_1 \cap A_2 \cap A_3) = \frac{92}{97}$ și $P(A_5/A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4) = \frac{91}{96}$ deci

$$Q = \frac{95}{100}\,\frac{94}{99}\,\frac{93}{98}\,\frac{92}{97}\,\frac{91}{96} = 0{,}77,$$

de unde $P = 1 - Q = 0{,}23$.

26. *Doi trăgători trag simultan asupra unei ținte. Probabilitatea de a nimeri ținta este* $p_1 = 0{,}7$ *și* $p_2 = 0{,}6$ *pentru primul respectiv al doilea trăgător. Să se găsească probabilitatea ca primul trăgător să nimerească ținta și al doilea nu.*

Rezolvare. Fie A_1 și A_2 evenimentele ca primul, respectiv al doilea trăgător să nimerească ținta; evenimentele A_1 și A_2 sînt independente.

Se cere: $P(A_1 - A_2) = P(A_1 \cap \bar{A}_2) = P(A_1)P(\bar{A}_2) = 0{,}7 \cdot 0{,}4 = 0{,}28$.

• **27.** *Să considerăm 3 urne identice ca aspect cu următoarele compoziții*

Urna	*numărul de bile albe*	*numărul de bile negre*
U_1	1	1
U_2	5	3
U_3	1	3

Se alege la întîmplare una din urne și din ea se extrage o bilă. Se cere probabilitatea ca bila extrasă să fie albă.

Rezolvare. Se aplică formula probabilității totale. Fie B evenimentul ca bila extrasă să fie albă și A_k, evenimentul ca să fi extras bila din urna U_k, $k = \overline{1,3}$, atunci $B = (A_1 \cap B) \cup (A_2 \cap B) \cup (A_3 \cap B)$ și deci $P(B) = P(A_1)P(B/A_1) + P(A_2)\ P(B/A_2) + P(A_3)P(B/A_3) = \frac{1}{3}\,\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\,\frac{5}{8} + \frac{1}{3}\,\frac{1}{4} = \frac{11}{24}$.

• **28.** *Fie urna* U_1 *cu 2 bile albe și o bilă neagră și urna* U_2 *cu o bilă albă și 5 bile negre. Se extrage o bilă din urna* U_1 *și se introduce în urna* U_2, *apoi se extrage o bilă din urna* U_2. *Știind că bila extrasă din urna* U_2 *este albă care este probabilitatea ca bila transferată să fi fost neagră?*

Rezolvare. Să aplicăm formula lui Bayes. Fie B evenimentul ca bila extrasă din urna U_2 să fie albă și A_1 respectiv A_2 evenimentele ca bila transferată din urna U_1 în urna U_2 să fie albă, respectiv neagră, atunci

$$P(A_1) = \frac{2}{3},\ P(A_2) = \frac{1}{3};\ P(B/A_1) = \frac{2}{7};\ P(B/A_2) = \frac{1}{7},$$

de unde

$$P(A_2/B) = \frac{\frac{1}{3}\,\frac{1}{7}}{\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{7}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{7}} = \frac{1}{5}.$$

Se va observa că probabilitatea *a priori* a evenimentului A_2 este $\frac{1}{3}$ iar probabilitatea *a posteriori* a evenimentului A_2 este $\frac{1}{5}$.

29. *Într-o cooperativă meșteșugărească se lucrează nasturi la două mașini, care apoi sînt puși în cutii identice ca aspect. După o zi de lucru prima mașină a produs n_1 cutii cu nasturi, iar a doua mașină a produs n_2 cutii cu nasturi. Presupunem că fiecare cutie care conține nasturi lucrați la prima, respectiv a doua mașină, conține 2%, respectiv 1% nasturi defecți.*

Din producția totală dintr-o zi a ambelor mașini se alege la întîmplare o cutie, se extrage un nasture din ea și se constată că este defect. Care este probabilitatea ca cutia aleasă să conțină nasturi produși la prima mașină?

Rezolvare. Se aplică formula lui Bayes. Să notăm că B evenimentul ca nasturele extras să fie defect și cu A_1 și A_2 evenimentul ca cutia aleasă să conțină nasturi produși la prima respectiv a doua mașină.

Avem

$$P(A_1) = \frac{n_1}{n_1+n_2}; \quad P(A_2) = \frac{n_2}{n_1+n_2}; \quad P(B/A_1) = \frac{2}{100}; \quad P(B/A_2) = \frac{1}{100},$$

deci

$$P(A_1/B) = \frac{\frac{n_1}{n_1+n_2}\,\frac{2}{100}}{\frac{n_1}{n_1+n_2}\,\frac{2}{100}+\frac{n_2}{n_1+n_2}\,\frac{1}{100}} = \frac{2n_1}{2n_1+n_2}.$$

30. *În urma unei experiențe un eveniment A poate apărea cu probabilitatea* 0,01.

a) Care este probabilitatea ca efectuînd 10 *experiențe evenimentul A să apară de* 4 *ori?*

b) Cîte experiențe trebuie făcute astfel ca probabilitatea de apariție cel puțin o dată a evenimentului A să nu fie mai mică decît 0,5*?*

Rezolvare. a) Se aplică schema lui Bernoulli, $n = 10$, $m = 4$, $p = 0{,}01$ iar $q = 0{,}99$ deci

$$P(10;\ 4) = \mathcal{C}_{10}^{4}(0{,}01)^4(0{,}99)^6.$$

b) Este mai comod să calculăm probabilitatea evenimentului contrar deci în n probe să nu apară nici o dată evenimentul A, ea este $Q = (0{,}99)^n$. Numărul n se determină din inegalitatea

$$1 - (0{,}99)^n \geqslant \frac{1}{2} \quad \text{deci } (0{,}99)^n \leqslant \frac{1}{2}, \text{ sau logaritmînd}$$

$n \log 0{,}99 \leqslant -\log 2$, de unde se obține $n \geqslant 70$.

Observație. Sînt necesare cel puțin 70 de experiențe pentru ca măcar o dată să apară evenimentul A cu o probabilitate mai mare decît 0,5. Atragem atenția asupra faptului că ar fi greșit să se creadă că dacă se fac de două ori mai multe experiențe, atunci probabilitatea ca să apară măcar o dată evenimentul A, ar fi foarte apropiată de unu. De exemplu, pentru o probabilitate cel puțin egală cu 0,98 ca să apară cel puțin o dată evenimentul A sînt necesare cel puțin 396 experiențe (și nu 140) deoarece

$$1 - (0{,}99)^n \geqslant 0{,}98$$

ne dă $(0{,}99)^n \leqslant 0{,}02$ sau $n \log 0{,}99 \leqslant \log 0{,}02$, de unde $n \geqslant 396$.

31. *Un punct M se mișcă în nodurile unei rețele din plan în felul următor. Dacă punctul M se află la un moment dat în nodul (x,y) atunci în secunda următoare poate trece fie în nodul $(x+1, y)$ cu probabilitatea p, fie în nodul $(x,y+1)$ cu probabilitatea q, nu poate rămîne pe loc și nici trece în alte noduri, deci $p+q=1$. Presupunem că coordonatele nodurilor sînt numere întregi nenegative, deci mișcarea are loc numai în primul cadran al axelor de coordonate.*

a) Care este probabilitatea ca punctul M plecînd din origine O (0,0) să ajungă în nodul $A(a,b)$?

b) Care este probabilitatea ca punctul M plecînd din origine să atingă segmentul CD unde $C(n,0)$, iar $D(n,n)$?

Rezolvare. a) Folosim schema lui Bernoulli, deoarece în fiecare secundă nu se pot produce decît două evenimente (punctul M face fie un pas orizontal la dreapta, fie un pas vertical în sus) cu probabilitățile p și q respectiv, probabilitățile rămîn aceleași în orice secundă, iar mișcările din secunde diferite sînt independente.

Pentru ca punctul M să ajungă în nodul A trebuie să facă $a+b$ deplasări dintre care a orizontale și b verticale, deci

$$P(a+b;\ a) = \mathcal{C}_{a+b}^{a} p^a q^b.$$

b) Fie A evenimentul ca punctul mobil să atingă segmentul CD și A_k evenimentul ca punctul mobil să atingă segmentul CD, prima dată în nodul $C_k(n,k)$, atunci $A = \bigcup_{k=0}^{n} A_k$, deoarece segmentul CD poate fi atins în oricare din punctele C_k, $k = \overline{0, n}$. Prin urmare $P(A) = \sum_{k=0}^{n} P(A_k)$, evenimentele A_k, $k = \overline{0, n}$ fiind două cîte două incompatibile.

Ca să calculăm $P(A_k)$, observăm că realizarea evenimentului A_k înseamnă realizarea a două evenimente independente și anume:

B_k : în secunda precedentă punctul M se găsește în nodul C'_k $(n-1,k)$

D_k: punctul M să treacă din nodul C'_k în nodul C_k

deci

$A_k = B_k \cap D_k$, iar $P(A_k) = P(B_k) \cdot P(D_k) = (C^k_{n+k-1} p^{n-1} q^k)\, p$ (Pentru probabilitatea $P(B_k)$ am folosit rezultatul de la punctul a). Deci probabilitatea căutată este

$$P(A) = \sum_{k=0}^{n} (C^k_{n+k-1} p^{n-1} q^k)\, p = p^n \sum_{k=0}^{n} C^k_{n+k-1} q^k.$$

32. *Doi jucători J_1 și J_2 convin să joace un joc pînă ce unul din ei cîștigă un anumit număr de partide, probabilitățile de cîștig al unei partide pentru J_1 și J_2 fiind p, respectiv q, $p+q=1$. Ei sînt forțați să întrerupă jocul cînd J_1 mai are a partide de cîștigat pentru ca să cîștige jocul, iar J_2 mai are b partide de cîștigat pentru ca să cîștige jocul.*

*a) Cum vor împărți corect între ei miza jocului?**)

b) Să se demonstreze identitatea:

$$p^a[1 + C^{a-1}_a q + C^{a-1}_{a+1} q^2 + \ldots + C^{a-1}_{a+1-2} q^{b-1}] + q^b[1 + C^{b-1}_b p + C^{b-1}_{b+1} p^2 + \ldots + C^{b-1}_{b+a-2} p^{a-1}] = 1,$$

unde $p, q > 0$ și $p+q=1$ iar a și b sînt numere naturale oarecare.

c) Să se demonstreze identitatea:

$$p^a[1 + C^{a-1}_a q + C^{a-1}_{a+1} q^2 + \ldots + C^{a-1}_{a+b-2} q^{b-1}] = \frac{(a+b-1)!}{a!(b-1)!} p^a q^{b-1}\left[1 + \frac{b-a}{a+b}\frac{p}{q} + \right.$$

$$\left. + \frac{(b-1)(b-2)}{(a+1)(a+2)}\left(\frac{p}{q}\right)^2 + \ldots + \frac{(b-1)(b-2)\ldots 2\cdot 1}{(a+1)(a+2)\ldots(a+b-1)}\left(\frac{p}{q}\right)^{b-1}\right]$$**)

unde $p, q \neq 0$, $p+q=1$, iar a și b sînt numere naturale oarecare.

Rezolvare. a) Să notăm cu P probabilitatea ca J_1 să fi cîștigat cele a partide rămase înainte ca J_2 să fi cîștigat cele b partide și fie $Q = 1 - P$, probabilitatea ca J_2 să fi cîștigat b partide înainte ca J_1 să fi cîștigat a partide. Jucătorii trebuie să împartă miza M în raportul $\frac{P}{Q}$ deci J_1 să ia suma PM, iar J_2 suma QM.

Să calculăm probabilitatea P. Jucătorul J_1 ar fi putut cîștiga cele a partide rămase în mai multe modalități incompatibile între ele și anume:

---

*) Această problemă cunoscută sub numele de „problema părților" are importanță istorică, fiind una din primele probleme de probabilități discutată și rezolvată, în corespondența lor, de către Pascal și Fermat.

**) Atragem atenția asupra faptului că unele identități sau inegalități a căror demonstrație directă este foarte greoaie, se pot stabili foarte simplu prin considerente probabilistice (vezi și problema 18, punctul b).

în exact a partide; în exact $a+1$ partide,... în exact $a+b-1$ partide. Să observăm că în toate cazurile, ultima partidă ar fi trebuit să fie cîștigată de J_1, altfel J_1 ar fi cîștigat jocul în mai puține partide decît numărul dat, exact.

Să găsim probabilitatea ca J_1 să fi cîștigat jocul în exact $a+k$ partide; $k=\overline{0,\ b-1}$. Să notăm cu A_{a+k-1}^{a-1} evenimentul ca J_1 să fie cîștigat $a-1$ partide din $a+k-1$ jucate și cu A evenimente ca J_1 să fi cîștigat ultima partidă; atunci J_1 ar fi cîștigat în exact $a+k$ partide cînd s-ar fi realizat evenimentul $A_{a+k-1}^{a-1}\cap A$; iar $P(A_{a+k-1}^{a-1}\cap A)=P(A_{a+k-1}^{a-1})P(A)$ deoarece evenimentele A_{a+k-1}^{a-1} și A sînt independente. Dar $P(A)=p$, iar pentru aflarea lui $P(A_{a+k-1}^{a-1})$ aplicăm aschema lui Bernoulli și găsim:
$P(A_{a+k-1}^{a-1})=\mathcal{C}_{a+k-1}^{a-1}p^{a-1}q^k$; $k=\overline{1,\ b-1}$
deci probabilitatea ca J_1 să fi cîștigat în exact $a+k-1$ partide este $\mathcal{C}_{a+k-1}^{a-1}p^aq^k$.

Probabilitatea ca J_1 să fi cîștigat jocul este

$$P=P((A_{a-1}^{a-1}\cap A)\cup(A_a^{a-1}\cap A)\cup(A_{a+1}^{a-1}\cap A)\cup\ldots\cup(A_{a+b-2}^{a-1}\cap A))=$$

$$=\sum_{k=0}^{b-1}P(A_{a+k-1}^{a-1}\cap A)=p^a+\sum_{k=1}^{b-1}\mathcal{C}_{a+k-1}^{a-1}p^aq^k=p^a\left[1+\sum_{k=1}^{b-1}\mathcal{C}_{a+k-1}^{a-1}q^k\right],$$

$$Q=q^b\left[1+\sum_{k=1}^{a-1}\mathcal{C}_{b+k-1}^{b-1}p^k\right].$$

b) Se obține din $P+Q=1$.

c) Găsim pe altă cale probabilitatea P. Să observăm că încă după cel mult $a+b-1$ partide s-ar fi putut decide care din cei doi jucători ar fi cîștigat. Să presupunem că jucătorii ar fi continuat să joace încă $a+b-1$ partide. Atunci dacă J_1 ar fi cîștigat cel puțin a partide din cele $a+b-1$, ar fi cîștigat și jocul; pe de altă parte, dacă numărul partidelor cîștigate de J_1 nu ar fi mai mic decît a, atunci J_1 ar fi cîștigat a partide înainte ca J_2 să fi cîștigat b partide și deci jocul ar fi fost cîștigat tot de J_1, prin urmare P este probabilitatea ca în $a+b-1$ partide J_1 să fi cîștigat cel puțin a partide sau $a+1$ partide sau... $a+b-1$ partide (modalități incompatibile). Probabilitatea ca în $a+b-1$ partide J_1 să fi cîștigat $a+k$; $k=\overline{0,\ b-1}$, o obținem folosind schema lui Bernoulli.

Deci

$$P=P(a+b-1;\ a)+P(a+b-1;\ a+1)+\ldots+P(a+b-1;\ a+b-1)=\mathcal{C}_{a+b-1}^{a}p^aq^{b-1}+\mathcal{C}_{a+b-1}^{a+1}p^{a+1}q^{b-2}+\ldots+\mathcal{C}_{a+b-1}^{a+b-1}p^{a+b-1}=$$

$$=\frac{(a+b-1)!}{a!\,(b-1)!}p^aq^{b-1}\left[1+\frac{b-1}{a+1}\cdot\frac{p}{q}+\frac{(b-1)(b-2)}{(a+1)(a+2)}\left(\frac{p}{q}\right)^2+\ldots+\right.$$

$$\left.+\ldots+\frac{(b-1)(b-2)\ldots2\cdot1}{(a+1)\ldots(a+b-1)}\left(\frac{p}{q}\right)^{b-1}\right].$$

Se obține identitatea, egalînd această expresie obținută pentru P cu cea obținută la punctul a). Propunem cititorului să verifice direct prin calcul identitatea de la acest punct.

Observație. Se poate da și o altă rezolvare pentru această problemă. Să notăm cu $p_{a,b}$ probabilitatea ca jocul să fie cîștigat de J_1 știind că jucătorul J_1 mai are de cîștigat încă a partide, pentru ca să cîștige jocul, în timp ce jucătorul J_2 mai are de cîștigat b partide, pentru ca să cîștige jocul. Să presupunem că se mai joacă încă o partidă. Atunci J_1 poate cîștiga jocul în următoarele două modalități incompatibile:

— J_1 cîștigă partida (cu probabilitatea p) și îi mai rămîn $a - 1$ partide de cîștigat, înainte ca J_2 să cîștige b partide (cu probabilitatea $p_{a-1,\,b}$).

— J_1 pierde partida (cu probabilitatea q) și îi mai rămîn a partide de cîștigat, înainte ca J_2 să cîștige $b - 1$ partide (cu probabilitatea $p_{a,\,b-1}$), deci

$$p_{a,b} = p \cdot p_{a-1,\,b} + q \cdot p_{a,\,b-1}.$$

Ecuația obținută trebuie rezolvată cu următoarele condiții inițiale:

$$p_{a,\,0} = 0 \text{ dacă } a > 0,$$
$$p_{0,\,b} = 1 \text{ dacă } b > 0,$$

aceasta deoarece $p_{a,\,0} = 0$ cînd $a > 0$, căci J_1 nu mai poate cîștiga jocul J_2 și-a cîștigat deja toate partidele necesare, iar $p_{0,\,b} = 1$ pentru $b > 0$, deoarece J_1 și-a cîștigat deja toate partidele necesare. Simbolul $p_{0,0}$ nu are interpretare probabilistică și luăm $p_{0,0} = 0$.

33. *Dintr-o urnă cu* 20 *de bile dintre care* 8 *albe,* 6 *negre și* 6 *roșii se extrag pe rînd* 5 *bile, punîndu-se de fiecare dată bila extrasă înapoi în urnă. Care este probabilitatea ca între cele* 5 *bile să fie* 2 *albe,* 1 *neagră și* 2 *roșii?*

Rezolvare. Se aplică schema lui Bernoulli cu mai multe stări, adică formula

$$P(n;\ m_1, \ldots, m_s) = \frac{n!}{m_1! \ldots m_s!} p_1^{m_1} \ldots p_s^{m_s}$$

În cazul nostru $s = 3$, $n = 5$; $m_1 = 2$, $m_2 = 1$, $m_3 = 2$, $p_1 = \frac{2}{5}$;

$$p_2 = \frac{3}{10}; \quad p_3 = \frac{3}{10}$$

deci

$$P(5;\ 2,\ 1,\ 2) = \frac{5!}{2!\ 1!\ 2!}\left(\frac{2}{5}\right)^2 \frac{3}{10}\left(\frac{3}{10}\right)^2 = 0{,}129.$$

34. *Probabilitățile ca diametrul unei piese de mașină să fie între limite mai mici, respectiv mai mari decît limitele admisibile prin* STAS, *sînt* 0,05 *și* 0,10, *iar probabilitatea ca diametrul unei piese să fie între limite admisibile este* 0,85.

Din întregul lot se extrag la întîmplare 100 *de piese. Care este probabilitatea ca între aceste piese alese,* 5 *să fie cu diametrul mai mic şi* 5 *să fie cu diametrul mai mare decît cel admisibil?*

Rezolvare. Se aplică schema lui Bernoulli cu mai multe stări, adică formula

$$P(n;\ m_1, \ldots, m_s) = \frac{n!}{m_1! \ldots m_s!} p_1^{m_1} \ldots p_s^{m_s}.$$

În cazul nostru $s = 3$, $n = 100$, $m_1 = 5$, $m_2 = 5$, $m_3 = 90$, $p_1 = 0{,}05$, $p_2 = 0{,}10$ iar $p_3 = 0{,}85$, deci

$$P(100;\ 5,\ 5,\ 90) = \frac{100!}{5!\ 5!\ 90!} (0{,}05)^5\ (0{,}1)^5\ (0{,}85)^{90}.$$

Prin logaritmare obţinem:

$\log P(100;\ 5,\ 5,\ 90) = \log\ 100! - 2 \log 5! - \log 90! + 5 \log 0{,}05 + 5 \log 0{,}1 + 90 \log 0{,}85.$

Folosind tabele pentru logaritmi, se obţine

$\log P(100;\ 5,\ 5,\ 90) = \bar{3},\ 7824$, de unde $P\ (100;\ 5,\ 5,\ 90) \simeq 0{,}006.$

• **35.** *Considerăm trei urne cu următoarea compoziţie:*

Urna	*nr. bile albe*	*nr. bile negre*
U_1	10	4
U_2	5	3
U_3	2	6

Care este probabilitatea ca luînd la întîmplare cîte o bilă din fiecare urnă să obţinem 2 *bile albe şi una neagră?*

Rezolvare. Se aplică schema lui Poisson, trebuie să calculăm coeficientul lui x^2 din polinomul

$$P(x) = (p_1 x + q_1)\ (p_2 x + q_2)(p_3 x + q_3),\ \text{unde}$$

$$p_1 = \frac{5}{7},\quad p_2 = \frac{5}{8},\quad p_3 = \frac{1}{4}\ \text{iar}\ q_k = 1 - p_k,\ k = \overline{1, 3};\ \text{deci}$$

$$P = \frac{5}{7} \cdot \frac{5}{8} \cdot \frac{3}{4} + \frac{5}{7} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{8} + \frac{5}{8} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{7} = \frac{25}{56}.$$

• **36.** *Se experimentează* 4 *prototipuri de aparate cîte unul din fiecare prototip. Probabilitatea ca un prototip să corespundă este* 0,8; 0,7; 0,9 *şi respectiv* 0,85. *Se cere probabilitatea ca toate cele* 4 *aparate experimentate să corespundă.*

Rezolvare. Se aplică schema lui Poisson, probabilitatea cerută este coeficientul lui x^4 din polinomul

$$P(x) = (0{,}8x + 0{,}2)(0{,}7x + 0{,}3)(0{,}9x + 0{,}1)(0{,}85x + 0{,}15)$$

deci

$$P = 0{,}8 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}9 \cdot 0{,}85 = 0{,}4284$$

37. *La un concurs de pian se prezintă* 12 *concurenți dintre care* 8 *pianiști și* 4 *pianiste. Prin tragere la sorți cei* 12 *concurenți sînt împărțiți în grupe de cîte* 4, *fiecare grupă prezentîndu-se la concurs într-o zi. Care este probabilitatea ca în prima zi de concurs să se prezinte în fața juriului* 3 *pianiste?*

Rezolvare. Se aplică schema bilei neîntoarse:

$$P_{4,8}(3,1) = \frac{C_4^3 \cdot C_8^1}{C_{12}^4}.$$

38. *Dintr-o urnă care conține n bile numerotate de la* 1 *la n se extrag deodată m bile* ($m \leqslant n$). *Care este probabilitatea ca i din bilele extrase să aibă numere prescrise dinainte.*

Rezolvare. Se aplică schema bilei neîntoarse

$$P_{a,b}(\alpha, \beta) = \frac{C_a^\alpha C_b^\beta}{C_{a+b}^{\alpha+\beta}}$$

unde în cazul nostru $a = i$, $b = n - i$, $\alpha = i$, $\beta = m - i$ și deci

$$P_{i,\, n-i}(i, m-i) = \frac{C_i^i C_{n-i}^{m-i}}{C_n^m} = \frac{m(m-1) \ldots (m-i+1)}{n(n-1) \ldots (n-i+1)}.$$

§ 3. Exerciții și probleme propuse

1. În rucsacul unui geolog se găsesc 7 săculețe identice cu probe, 3 cu granit, 2 cu gresie și 2 cu calcar. Care este probabilitatea ca un săculeț ales la întîmplare să conțină o probă de granit?

2. În șase borcănașe de porțelan se introduc bucățele de germaniu, zinc, staniu, fier, aluminiu și plumb, respectiv. Care este probabilitatea ca alegînd la întîmplare un borcănaș el să conțină bucățele dintr-un metal din grupa a IV-a a sistemului periodic?

3. În cinci borcănașe de porțelan se introduc fire de cupru, aluminiu, aur, nichel și argint, respectiv. Se alege un borcănaș la întîmplare. Se cere probabilitatea ca borcanul să conțină fire dintr-un metal de grupa I a sistemului periodic.

4. Fiecare din primele 20 de numere naturale se scrie pe un cartonaș. Se amestecă cartonașele și se așază apoi unul după altul. Care este probabilitatea ca numărul 5 să apară imediat după numărul 15?

5. Fiecare număr prim mai mic decît 20 se scrie pe un cartonaș. Se amestecă cartonașele și se așază apoi unul după altul. Se cere probabilitatea ca numerele prime 7 și 17 să fie vecine (indiferent de ordinea lor).

6. Cele 12 numere dintr-un an ale unei reviste cu apariție lunară sînt așezate la întîmplare pe un raft.

Să se găsească probabilitatea ca revistele să fie așezate în ordinea apariției.

7. Toate numerele apărute într-un an ale revistei Rebus*) sînt așezate la întîmplare într-un raft. Se cere probabilitatea ca revistele să nu fie așezate în ordinea apariției.

8. Se aruncă o monedă de 4 ori. Care este probabilitatea ca:

a) Stema să apară de două ori?

b) Stema să apară cel puțin o dată?

9. Se aruncă trei zaruri. Știind că zarurile au căzut pe fețe diferite, care este probabilitatea să apară un șase?

10. Se aruncă două zaruri, de n ori. Pentru ce valori ale lui n probabilitatea ca să apară cel puțin o dată dubla șase este mai mare decît $\frac{1}{2}$?

11. Joacă șah doi parteneri cu forță egală de joc. Notînd cu $p_{4,3}$ probabilitatea ca din 4 partide unul din parteneri să cîștige 3 partide și cu $p_{8,5}$ probabilitatea ca din 8 partide, unul din jucători să cîștige 5, să se arate că

$$p_{4,3} > p_{8,5}.$$

Să se interpreteze rezultatul.

12. Se aruncă două zaruri. Se cere probabilitatea ca:

a) Să obținem o dublă.

b) Suma punctelor obținute să fie divizibilă prin 3.

c) Suma punctelor obținute să fie un număr par.

d) Suma punctelor obținute să fie mai mare decît 10.

13. Fiecare coeficient al ecuației trigonometrice $a \operatorname{tg} x = b$ este determinat prin aruncarea unui zar și luarea numărului de puncte ieșit. Care este probabilitatea ca ecuația dată să admită soluțiile $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$, $k = 0, 1, 2, \ldots$**)

---

*) Revista Rebus apare bilunar.

**) Pentru o altă metodă de rezolvare vezi problema 21, § 3, cap. III.

14. Fiecare coeficient al ecuației $ax + b = 0$ este determinat prin aruncarea unui zar și luarea numărului de puncte ieșit. Să se găsească probabilitatea că ecuația obținută să aibă rădăcina un număr întreg. *)

15. Fiecare coeficient al ecuației $ax^2 + bx + c = 0$ se determină prin aruncarea unui zar și luarea numărului de puncte ieșit. Se cere probabilitatea ca ecuația astfel obținută să admită rădăcini egale. **)

16. Se așază la întîmplare 20 de cărți pe trei rafturi. Care este probabilitatea ca un raft să conțină 7 cărți?

17. Se pun la întîmplare 15 creioane în două penare. Care este probabilitatea ca un penar să aibă 4 creioane?

18. Nouă creioane colorate, 3 roșii, 3 galbene și 3 albastre, se pun la întîmplare în 3 cutii, cîte 3 creioane în fiecare cutie. Care este probabilitatea ca fiecare cutie să conțină cîte un creion din fiecare culoare?

19. La un concurs de orientare turistică participă elevi de la 4 școli, cîte 10 de fiecare școală. Prin tragere la sorți se formează grupe de cîte patru elevi. Care este probabilitatea ca fiecare grupă să conțină cîte un reprezentant de la fiecare școală?

20. Un pachet de 36 de cărți de joc este împărțit la întîmplare în două părți egale.

a) Se cere probabilitatea ca ambele părți să aibă un număr egal de cărți roșii și negre.

b) Să se aproximeze probabilitatea găsită la punctul a), folosind formula lui Stirling (vezi Nota de la problema 13, § 2).

21. Dintr-o urnă cu N bile numerotate de la 1 la N se extrag deodată n bile. Fie $x_1 < \ldots < x_m < \ldots < x_n$ numerele înscrise pe bilele extrase, aranjate în ordine crescătoare. Să se găsească probabilitatea ca $x_m = M$. Pentru ce valori ale lui M, $P(x_m = M) \neq 0$?

22. Dintr-o urnă cu N bile numerotate de la 1 la N se extrag deodată n bile. Se cere probabilitatea ca:

---

*) Pentru o altă metodă mai simplă de rezolvare vezi problema 30, §3, cap. III.

**) Pentru o altă metodă de rezolvare, mult mai simplă, vezi problema 17, §2, cap. III.

a) cel mai mic număr de pe bilele extrase să fie egal cu M.
b) cel mai mare număr de pe bilele extrase să fie egal cu M.

23. Fie A și B două evenimente compatibile. Să se arate că evenimentele $A \cap B$, $\bar{A} \cap \bar{B}$ și $A \circ B$ *) formează un sistem complet de evenimente.

24. O țintă constă din un disc și trei coroane concentrice. La o tragere un trăgător nimerește discul și coroanele cu probabilitățile 0,20; 0,15; 0,12 și respectiv 0,10. Care este probabilitatea ca la o singură tragere să se nimerească ținta?

25. În urma unei experiențe pot apărea mai multe evenimente printre care evenimentele A_k, $k = \overline{1, 4}$ incompatibile cu probabilitățile 0,01; 0,04; 0,12 și respectiv 0,03. Să se găsească probabilitatea ca efectuînd experiența să apară cel puțin unul dintre evenimentele A_k, $k = \overline{1, 4}$.

26. În condițiile din problema *21* să se găsească probabilitatea ca:
a) $x_m \geqslant M_1$
b) $x_m \leqslant M_2$
c) $M_1 < x_m \leqslant M_2$.

27. În condițiile din problema *21* să se găsească probabilitatea ca:
a) $x_m < M_1$.
b) $x_m > M_2$.

28. Dintr-o urnă cu N bile numerotate de la 1 la N se extrag deodată n bile. Se cere probabilitatea ca cel mai mic număr înscris pe bilele extrase să fie:
a) cel puțin egal cu M_1,
b) cel mult egal cu M_2,
c) mai mare decît M_1 și cel mult egal cu M_2.

29. Dintr-o urnă cu N bile numerotate de la 1 la N se extrag deodată n bile. Se cere probabilitatea ca cel mai mare număr înscris pe bilele extrase să fie:
a) cel puțin egal cu M_1,
b) cel mult egal cu M_2,
c) mai mare decît M_1 și cel mult egal cu M_2.

30. În zece sticluțe se introduc respectiv soluțiile următoarelor substanțe: HCl (acid clorhidric), HNO_3 (acid azotic); H_3BO_3 (acid boric); NaOH (hidroxid de sodiu); KOH (hidroxid de potasiu); NH_4OH (hidroxid de amoniu);

*) $A \circ B = (A - B) \cup (B - A)$

NaBr (bromură de sodiu); Na_2CO_3 (carbonat de sodiu); KNO_3 (azotat de potasiu) și KI (iodură de potasiu); care este probabilitatea ca:

a) alegînd o sticluță la întîmplare, ea să conțină soluția unei baze?

b) alegînd o sticluță la întîmplare, ea să conțină soluția unei baze sau a unei sări?

c) alegînd pe rînd două sticluțe la întîmplare, una să conțină soluția unui acid și alta a unei sări?

31. Într-o urnă sînt 3 bile albe și 5 bile negre. Se extrage din urnă de două ori cîte o bilă fără a se repune bila extrasă înapoi. Se cere probabilitatea ca cele două bile extrase să fie:

a) albe;

b) negre;

c) una albă și una neagră.

32. Folosind considerente probabilistice să se verifice identitatea:

$$1 + \frac{n-a}{n-1} + \frac{(n-a)(n-a-1)}{(n-1)(n-2)} + \ldots + \frac{(n-a)\ldots 2\cdot 1}{(n-1)\ldots(a+1)a} = \frac{n}{a}$$

unde a și n sînt numere naturale cu $n \geqslant a$.

33. Dintr-o urnă cu a bile albe și b bile negre se extrag deodată n bile $(n \leqslant a + b)$.

a) Să se găsească probabilitatea ca între bilele extrase să fie cel puțin o bilă albă.

b) să se demonstreze identitatea

$$1 + \frac{b}{a+b-1} + \ldots + \frac{b(b-1)\ldots(b-n+2)}{(a+b-1)(a+b-2)\ldots(a+b-n+1)} =$$

$$= \frac{a+b}{a}\left[1 - \frac{b(b-1)\ldots(b-n+1)}{(a+b)(a+b-1)\ldots(a+b-n+1)}\right].$$

unde a, b, n sînt numere naturale cu $n \leqslant a + b$.

34. Considerăm n urne numerotate de la 1 la n, fiecare conținînd a bile albe și b bile negre. Se transferă la întîmplare o bilă din prima urnă în a doua, apoi din a doua în a treia ș.a.m.d. Se extrage apoi o bilă din ultima urnă. Care este probabilitatea ca bila extrasă din ultima urnă să fie albă?

35. În n urne se introduc cîte N bile numerotate de la 1 la N. Se extrage apoi cîte o bilă din fiecare urnă. Să se găsească probabilitatea ca cel mai mare număr înscris pe bilele extrase să fie:

a) cel mult egal cu M.

b) să depășească pe M.

c) egal cu M.

36. În n urne se introduc cîte N bile numerotate de la 1 la N. Se extrage apoi cîte o bilă din fiecare urnă. Să se găsească probabilitatea ca cel mai mic număr înscris pe bilele extrase să fie:

a) cel puțin egal cu M.

b) egal cu M.

c) cel mult egal cu M.

37. Fie A și B două evenimente aleatoare independente. Să se arate că evenimentele $\bar{A}$ și $\bar{B}$ sînt independente.

38. Un trăgător poate nimeri în prima țintă cu probabilitatea $\frac{4}{5}$. Dacă nimerește ținta din o singură tragere, atunci trăgătorul mai are dreptul la o tragere în a doua țintă. Probabilitatea nimeririi în ambele ținte din două trageri este egală cu $\frac{2}{5}$. Se cere probabilitatea nimeririi celei de a doua ținte.

39. Declanșarea unei rețele electrice are loc atunci cînd iese din circuit cel puțin unul din trei elemente, legate în serie. Fie $p_1 = 0{,}3$, $p_2 = 0{,}4$ și $p_3 = 0{,}2$ probabilitățile de ieșire din circuit a celor trei elemente respectiv, ieșirile elementelor avînd loc independent. Se cere probabilitatea ca rețeaua electrică să nu se declanșeze.

40. Un aparat care conține N lămpi își întrerupe activitatea cînd o lampă se defectează. Probabilitatea ca orice lampă să se defecteze este egală cu p și lămpile se defectează independent una de alta. Știind că aparatul și-a întrerupt activitatea și că găsirea lămpii defecte se face prin înlocuirea pe rînd a fiecărei lămpi cu o lampă nouă, să se găsească probabilitatea ca să se detecteze lampa defectă efectuînd n înlocuiri.

41. Fie p_x probabilitatea ca o persoană de x ani să fie în viață după un an și ${}_tp_x$ probabilitatea ca o persoană de x ani să fie în viață după t ani. Să se arate că:

a) ${}_{t+u}p_x = {}_tp_x \, {}_up_{x+t}$

b) ${}_tp_x = p_x p_{x+1} \cdots p_{x+t-1}$.

Observație. $q_x = 1 - p_x$ adică probabilitatea ca o persoană de x ani să moară în acel an se numește *rata de mortalitate* la vîrsta x și se folosește pentru alcătuirea tabelelor cu rate de mortalitate, care au aplicație în asigurări.

42. Să se arate că dacă $P(A/B) > P(A)$ atunci $P(B/A) > P(B)$.

43. Dintr-un lot de piese dintre care 5% sînt rebuturi și 68% din piesele bune sînt de prima calitate, se extrage la întîmplare o piesă. Se cere probabilitatea ca piesa extrasă să fie de prima calitate.

44. Fie $P(A) = p_1$ și $P(B) = p_2 \neq 0$, să se arate că $P(A/B) \geqslant \frac{p_1 + p_2 - 1}{p_2}$.

45. Fiind cunoscute probabilitățile $P(A)$, $P(B)$ și $P(A \cap B)$ să se găsească următoarele probabilități:

a) $P(\bar{A} \cup \bar{B})$; b) $P(\bar{A} \cap \bar{B})$; c) $P(\bar{A} \cup B)$; d) $P(\bar{A} \cap B)$; e) $P(\overline{A \cup B})$; f) $P(\overline{A \cap B})$; g) $P(\bar{A} \cap (A \cup B))$; h) $P(A \cup (\bar{A} \cap B))$; i) $P(A \circ B)$ *).

46. Doi trăgători trag simultan asupra unei ținte. Să se găsească probabilitatea ca ținta să fie atinsă de cel puțin un trăgător, știind că probabilitățile de nimerire a țintei sînt corespunzător 0,7 și 0,8.

47. Se efectuează trei trageri independente la aceeași țintă. Probabilitățile de nimerire la țintă sînt 0,8; 0,5; 0,6 corespunzător. Se cere probabilitatea ca ținta să fie nimerită la cel puțin una din trageri.

48. Declanșarea unui circuit electric poate avea loc atunci cînd iese din rețea un element S_1, sau două elemente S_2 și S_3. Elementele ies din rețea independent unul de celălalt, cu probabilitățile $p_1 = 0{,}3$, $p_2 = 0{,}2$, $p_3 = 0{,}2$ respectiv. Care este probabilitatea declanșării circuitului electric?

49. Patru bile numerotate de la 1 la 4 sînt introduse la întîmplare în patru cutii numerotate de la 1 la 4, cîte o bilă în fiecare cutie. Se cere probabilitatea ca pentru toate bilele numărul înscris pe bilă să difere de numărul cutiei în care se află.

50. Se aruncă n zaruri. Care este probabilitatea ca fiecare din fețele 1, 2, 3, 4, 5, 6 să apară cel puțin o dată?

51. Un lot de 100 de produse este supus controlului de calitate. Lotul este respins dacă se găsește măcar un rebut între patru piese controlate, luate la întîmplare din lot. Știind că lotul conține 2% piese defecte, care este probabilitatea ca lotul să fie respins?

52. La o tombolă sînt N bilete dintre care M cîștigătoare. O persoană cumpără n bilete. Care este probabilitatea ca cel puțin un bilet din cele n să fie cîștigător?

---

*) $A \circ B = (A - B) \cup (B - A)$

53. Considerăm două urne cu următoarea compoziție:

urna	nr. bile albe	nr. bile negre
U_1	2	1
U_2	3	2

O bilă este transferată din urna U_1 în urna U_2, după care se extrage o bilă din urna U_2. Care este probabilitatea ca bila extrasă să fie albă?

54. Fie urna U_1 care conține n_1 bile dintre care a_1 albe și b_1 negre și urna U_2 care conține n_2 bile dintre care a_2 albe și b_2 negre.

Se transferă o bilă din urna U_2 în urna U_1 și se extrage apoi o bilă din urna U_1. Se cere probabilitatea ca: a) bila extrasă să fie albă; b) bila extrasă să fie neagră.

55. Considerăm 5 urne cu următoarea compoziție:

urna	nr. bile albe	nr. bile negre
U_1	2	3
U_2	1	4
U_3	2	3
U_4	4	1
U_5	1	4

Se extrage la întîmplare o bilă din una din urne și se constată că este albă. Care este probabilitatea ca bila să fi fost extrasă din urna U_4?

56. Se consideră trei urne cu următoarea compoziție:

urna	nr. bile albe	nr. bile negre	nr. bile roșii
U_1	1	2	3
U_2	2	1	1
U_3	4	5	3

Se alege o urnă la întîmplare și se extrag două bile. Se constată că una din bile este albă și alta este roșie. Care este probabilitatea ca extracția să se fi făcut din urna U_2 sau din urna U_3?

57. Se consideră două loturi de produse dintre care un lot are toate piesele corespunzătoare, iar al doilea lot cu 1/4 din piese rebuturi. Se alege la întîmplare un lot și se extrage din el o piesă care se constată că este bună. Se reintroduce piesa în lot și se extrage apoi din același lot o piesă. Care este probabilitatea ca această piesă să fie un rebut?

58. Consumul energiei electrice de-a lungul a 24 ore nu întrece normele stabilite cu probabilitatea 0,8. Să se găsească probabilitatea ca din 5 zile consecutive, consumul energiei electrice să nu depășească normele stabilite în 3 zile.

59. În urma unei experiențe poate apărea evenimentul A cu probabilitatea p. Se fac n experiențe independente. Să se calculeze probabilitatea ca:

a) evenimentul A să apară cel puțin o dată;

b) evenimentul A să apară cel puțin de 2 ori;

c) evenimentul A să apară cel puțin de 3 ori.

60. Un muncitor deservește simultan 10 mașini de același tip. Probabilitatea ca o mașină să necesite o intervenție într-un interval de timp de mărime t este egală cu $\frac{1}{3}$, aceeași pentru toate mașinile. Se cere probabilitatea ca:

a) În intervalul de timp acordat, 4 dintre mașini să necesite cîte o intervenție.

b) Numărul mașinilor care necesită cîte o intervenție în același interval de timp de mărime t, să fie cel puțin egal cu 3 și cel mult egal cu 6.

61. Un număr de 8 trăgători trag simultan asupra unei ținte, probabilitatea ca un trăgător să nimerească ținta este $p = 0{,}4$ și aceeași pentru toți trăgătorii. Care este probabilitatea ca ținta să fie atinsă de cel puțin 3 trăgători și de cel mult 5 trăgători?

62. Un lot de 20 porumbei călători sînt trimiși spre o destinație. Probabilitatea ca un porumbel să se întoarcă este $p = 0{,}6$ și aceeași pentru toți porumbeii. Se cere probabilitatea ca:

a) să se întoarcă 14 porumbei;

b) să se întoarcă cel puțin 8 porumbei;

c) să se întoarcă cel mult 18 porumbei;

d) să se întoarcă cel puțin 10 porumbei și cel mult 16 porumbei.

63. Fie $P(n;\ m) = C_n^m p^m q^{n-m}$. Să se arate că:

a) $P(n;\ m+1) > P(n;\ m)$ dacă $np - q > m$,

$P(n;\ m+1) = P(n;\ m)$ dacă $np - q = m$,

$P(n;\ m+1) < P(n;\ m)$ dacă $np - q < m$.

b) Să se interpreteze rezultatul de la punctul a).

c) Să se găsească *cel mai probabil număr de succese*, unde prin cel mai probabil număr de succese, înțelegem acea valoare întreagă a lui m, pentru care $P(n;\ m)$ considerată ca funcție de m, își atinge maximul.

64. Să se găsească cel mai probabil număr de succese într-o schemă Bernoulli, cînd $n = 20$, $p = \frac{1}{6}$.

65. Care este cel mai probabil număr de porumbei întorși, atunci cînd se trimite un lot de 40 de porumbei și probabilitatea de întoarcere a oricărui porumbel este $p = 0{,}3$?

66. Să se găsească cel mai probabil număr de succese, într-o schemă Bernoulli cînd $n = 50$, $p = \frac{1}{3}$.

67. Probabilitatea ca un trăgător să nimerească la o țintă este $p = 0{,}8$. Se fac 10 trageri în aceleași condiții:

a) care este probabilitatea ca ținta să fie atinsă cel puțin de 2 ori?

b) care este cel mai probabil număr de nimeriri în țintă?

68. Probabilitatea ca un portar al unei echipe de fotbal să prindă mingea la o lovitură liberă de pedeapsă de la 11 m este $p = 0{,}3$. Se cere:

a) probabilitatea ca din 3 lovituri să prindă mingea la toate loviturile;

b) probabilitatea ca din 3 lovituri să primească cel mult două goluri;

c) numărul cel mai probabil de goluri, atunci cînd se execută 4 lovituri.

69. Probabilitatea ca luînd la întîmplare o piesă dintr-un lot să fie defectă, este 0,005. Sînt controlate 100 de piese din lot, care se extrag cîte una, punîndu-se de fiecare dată piesa controlată înapoi în lot. Se cere:

a) Probabilitatea ca să se găsească 4 piese defecte.

b) Probabilitatea ca să se găsească cel mult 6 piese defecte.

c) Cel mai probabil număr de piese bune.

70. O țintă constă dintr-un disc și două coroane circulare concentrice. Probabilitatea ca la o tragere să se nimerească în disc, respectiv în coroane, este 0,2; 0,32 și 0,4. Știind că s-au făcut 10 trageri în aceleași condiții, să se găsească probabilitatea ca la 5 trageri să se nimerească în disc, la 4 trageri în prima coroană și la o tragere în a doua coroană.

71. O urnă conține bile de patru culori diferite, din fiecare culoare fiind același număr de bile. Se fac 4 extracții de cîte o bilă, punîndu-se de fiecare dată bila extrasă înapoi în urnă. Care este probabilitatea ca să apară cîte o bilă de fiecare culoare?

72. Un muncitor produce cu probabilitățile 0,96; 0,03 și 0,01 respectiv o piesă bună, o piesă cu un defect remediabil și un rebut. Muncitorul a produs trei piese. Care este probabilitatea ca între cele trei piese să fie cel puțin o piesă bună și cel puțin un rebut?

• **73.** La un concurs „Cutezătorii" se prezintă pionieri, băieți și fete, din trei clase a V-a paralele și anume:

cl. a V-a A	6 băieți	4 fete
cl. a V-a B	4 băieți	5 fete
cl. a V-a C	5 băieți	5 fete

Pentru prima întrebare se alege prin tragere la sorți cîte un pionier din fiecare clasă. Care este probabilitatea ca printre pionierii aleși să fie doi băieți și o fată?

• **74.** O echipă de 4 sportivi trag la popice izolate. Probabilitatea ca să piardă o bilă pentru fiecare sportiv din echipă este de 0,05; 0,04; 0,06 și respectiv 0,03. Fiecare sportiv din echipă trage o bilă; care este probabilitatea ca echipa să piardă o bilă?

• **75.** O echipă de 3 trăgători trag asupra unei ținte. Pentru fiecare nimerire a țintei se acordă echipei un punct. Probabilitățile de nimerire la țintă sînt egale cu 0,7; 0,8 și 0,6 respectiv pentru fiecare trăgător din echipă.

Se cere probabilitatea ca echipa să cîștige două puncte atunci cînd fiecare din trăgători face o singură tragere.

• **76.** Un trăgător trage cîte un singur foc asupra unei ținte cu fiecare din cele 5 puști pe care le are la dispoziție. Probabilitățile de nimerire la țintă sînt corespunzător 0,8; 0,7; 0,4; 0,9 și 0,5 pentru fiecare pușcă în parte. Care este probabilitatea ca: a) ținta să fie nimerită de 3 ori? b) ținta să fie nimerită cel puțin de două ori și cel mult de 4 ori?

77. La o tombolă sînt 400 de bilete dintre care 4 cîștigătoare. O persoană cumpără 10 bilete. Care este probabilitatea să găsească cel puțin un bilet cîștigător?

78. Într-un lot de N piese sînt M rebuturi. Se alege la întîmplare din lot n ($n < N$) piese. Să se găsească probabilitatea ca m ($m \leqslant M$) din piesele extrase să fie rebuturi.

• **79.** Într-o urnă sînt 36 bile de două culori, albe și negre, în proporție de o bilă albă la 8 bile negre. Se extrag deodată 3 bile. Se cere probabilitatea ca printre bilele extrase să fie o bilă albă.

80. Opt elevi, dintre care 4 fete și 4 băieți, sînt împărțiți la întîmplare în două grupe egale. Care este probabilitatea ca în fiecare grupă să fie același număr de băieți și de fete?

81. Într-o sală de spectacole cu N locuri, se ocupă la întîmplare n locuri ($n < N$). Să se găsească probabilitatea ca printre locurile ocupate să fie m locuri fixate dinainte ($m \leqslant n$).

82. Într-o urnă sînt 40 de bile dintre care 10 albe, 10 negre, 10 roșii și 10 verzi. Se extrag deodată 2 bile. Care este probabilitatea ca printre bilele extrase să fie cel puțin o bilă albă?

83. În condițiile din problema *79*, să se găsească probabilitatea ca să apară cel puțin o bilă albă.

84. La o tombolă cu 10 000 de bilete, 100 sînt cîștigătoare. O persoană cumpără m bilete. Să se găsească cel mai mic m, astfel ca probabilitatea ca persoana să găsească cel puțin un bilet cîștigător să fie mai mare decît 0,5.

§ 4. Indicații și răspunsuri

1. $P = \frac{3}{7}$.

2. $P = \frac{1}{2}$ (6 cazuri posibile și 3 cazuri favorabile: germaniu, staniu, plumb).

3. $P = \frac{3}{5}$ (3 cazuri favorabile: cupru, argint, aur).

4. $P = \frac{19 \cdot 18!}{20!}$ (vezi problema 3, § 2).

5. $P = 2 \cdot \frac{7 \cdot 6!}{8!}$ (vezi problema 3, § 2).

6. — Cazuri favorabile: 1.

— Cazuri posibile: 12!, deci $P = \frac{1}{12!}$

7. $P = 1 - \frac{1}{24!}$.

8. a) cazuri posibile: $2^4 = 16$

cazuri favorabile: 6, deci $P = \frac{3}{8}$.

b) Se calculează probabilitatea evenimentului contrar:

$Q = \frac{1}{16}$ iar $P = 1 - \frac{1}{16} = \frac{15}{16}$.

9. Se calculează probabilitatea evenimentului contrar: cazuri favorabile $5 \cdot 4 \cdot 3$ (posibilitatea de alegere a trei fețe diferite, toate diferite de șase).

— cazuri posibile: $6 \cdot 5 \cdot 4$, deci $P = 1 - \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{6 \cdot 5 \cdot 4} = \frac{1}{2}$.

10. Avem $1-\left(\frac{35}{36}\right)^n > \frac{1}{2}$ (vezi problema 4, § 2), deci $\left(\frac{35}{36}\right)^n < \frac{1}{2}$; logaritmînd, obţinem:

$n > \frac{\log 2}{\log 36 - \log 35} = 24{,}6$, deci $n \geqslant 25$. *)

11. $p_{4,3} = \frac{1}{4}$, $p_{8,5} = \frac{7}{32}$, deci $p_{4,3} - p_{8,5} > 0$. Este mai probabil ca un jucător să cîştige trei partide din patru jucate, faţă de un adversar la fel de tare, decît cinci partide din opt. Rezultatul pare surprinzător deoarece $\frac{5}{8} < \frac{3}{4}$; prin teoria probabilităţilor acest rezultat se explică astfel: cînd numărul total de partide creşte, atunci în general probabilitatea unui anumit rezultat se micşorează, deoarece creşte numărul cazurilor posibile şi nu întotdeauna în acelaşi raport şi numărul cazurilor favorabile (vezi şi problema 5, § 2).

12. *a)* $P = \frac{1}{6}$; *b)* $P = \frac{12}{6^2} = \frac{1}{3}$; *c)* $P = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$; *d)* $P = \frac{3}{6^2} = \frac{1}{12}$.

13. Trebuie ca $a = b$; deci aruncînd două zaruri să obţinem o dublă: $P = \frac{1}{6}$.

14. Cazuri posibile: $6^2 = 36$.

Cazuri favorabile: 14, adică numărul perechilor de numere naturale (a, b) astfel ca $1 \leqslant a, b \leqslant 6$ şi $a|b$ (a divide b), deci $P = \frac{14}{36} = \frac{7}{18}$.

15. — Cazuri posibile: $6^3 = 216$.

— Cazuri favorabile: 5, adică numărul ternelor (a, b, c) de numere naturale cu $1 \leqslant a, b, c \leqslant 6$ $b^2 - 4ac = 0$, deci $P = \frac{5}{216}$.

16. $P = \frac{C_{20}^7 \cdot 2^{13}}{3^{20}}$ (vezi problema 10, § 2)

17. $P = \frac{C_{15}^4}{2^{15}}$ (vezi problema 10, § 2).

18. $P = \frac{(3!)^6}{9!}$ (vezi problema 13, § 2)

19. $P = \frac{(4!)^{10}\,(10!)^4}{40!}$ (vezi problema 13, § 2).

20. a) $P = \frac{C_{18}^9 C_{18}^9}{C_{36}^{18}} = \frac{(18!)^4}{36!(9!)^4}$

b) $n! \simeq n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}$, deci $P \simeq \frac{2}{\sqrt{18\pi}}$.

21. $P = \frac{C_{M-1}^{m-1} C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n}$. Sînt C_N^n cazuri posibile; numărul cazurilor favorabile $C_{M-1}^{m-1} C_{N-M}^{n-m}$ îl găsim în felul următor:

Sînt C_{M-1}^{m-1} cazuri de extragere a celor $m-1$ bile cu numere mai mici decît M (se extrag $m-1$ bile dintre $M-1$ bile, numerotate cu 1,2, ..., $M-1$) apoi un singur caz de extragere a bilei numerotate cu M şi C_{N-M}^{n-m} cazuri de extragere a $n-m$ bile cu numere mai mari decît M (se

*) vezi nota de la problema 5, § 2.

extrag n-m bile dintre $N-M$ bile, numerotate cu $M+1$, $M+2$, ...,N), în total $C_{N-1}^{m-1} \cdot 1 \cdot C_{N-M}^{n-m}$ cazuri favorabile. $P(x_n = M) \neq 0$ pentru $m \leqslant M \leqslant N-n+m$.

22. a) $P = \dfrac{C_{N-M}^{n-1}}{C_N^n}$, se obține din problema 21, pentru $m = 1$.

b) $P = \dfrac{C_{M-1}^{n-1}}{C_N^n}$, se obține din problema 21, pentru $m = n$.

23. Se folosește că $A \circ B = (A \cap \bar{B}) \cup (\bar{A} \cap B)$, se constată imediat că evenimentele sînt două cîte două incompatibile. Apoi $(A \cap B) \cup (\bar{A} \cap \bar{B}) \cup (A \circ B) = E$; $P(A \cap B) + P(\bar{A} \cap \bar{B}) + P(A \circ B) = 1$.

24. $P = 0{,}20 + 0{,}15 + 0{,}12 + 0{,}10 = 0{,}57$.

25. $P = P\left(\bigcup_{k=1}^{4} A_k\right) = \sum_{k=1}^{4} P(A_k) = 0{,}2$.

26. a) $P(x_m \geqslant M_1) = P(x_m = M_1) + P(x_m = M_1 + 1) + \ldots + P(x_m = N)$; dar $P(x_m = k) \neq 0$ dacă $m \leqslant k \leqslant N - n + m$, deci

$$P(x_m \geqslant M_1) = \sum_{k=\alpha}^{N-n+m} \frac{C_{k-1}^{m-1} C_{N-k}^{n-m}}{C_N^n}; \text{ unde } \alpha = \max(m, M_1).$$

b) $P(x_m \leqslant M_2) = P(x_m = 1) + P(x_n = 2) + \ldots + P(x_m = M_2) = \sum_{k=1}^{\beta} \frac{C_{k-1}^{m-1} C_{N-k}^{n-m}}{C_N^n}$; unde $\beta = \min(N - n + m, M_2)$.

c) $P(M_1 < x_m \leqslant M_2) = P(x_m \leqslant M_2) - P(x_m \leqslant M_1)$.

27. a) $P(x_m < M_1) = 1 - P(x_m \geqslant M_1)$;

b) $P(x_m > M_2) = 1 - P(x_m \leqslant M_2)$ (vezi problema 26).

28. Se obține ca un caz particular din problema 26, pentru $m = 1$.

29. Se obține ca un caz particular din problema 26, pentru $m = n$.

30. a) $\frac{3}{10}$; b) $\frac{3}{10} + \frac{4}{10} = \frac{7}{10}$; c) $\frac{3}{10} \cdot \frac{4}{9}$.

31. a) $\frac{3}{8} \cdot \frac{2}{7}$; b) $\frac{5}{8} \cdot \frac{4}{7}$; c) $\frac{3}{8} \cdot \frac{5}{7}$.

32. Se consideră o urnă cu n bile dintre care a albe. Se extrage pe rînd cîte o bilă din urnă fără repunerea în urnă. Fie A_k evenimentul ca prima bilă albă să apară la extracția k, atunci $\sum_{k=1}^{n-a+1} P(A_k) = 1$, dă identitatea dorită.

33. a) Probabilitatea cerută poate fi exprimată în două moduri: calculînd întîi probabilitatea evenimentului contrar și deci probabilitatea căutată este

$$1 - \frac{b(b-1)\ldots(b-n+1)}{(a+b)(a+b-1)\ldots(a+b-n+1)}$$

sau calculînd direct probabilitatea cerută, obținem

$$\frac{a}{a+b}\left[1 + \frac{b}{a+b-1} + \ldots + \frac{b(b-1)\ldots(b-n+1)}{(a+b-1)(a+b-2)\ldots(a+b-n+1)}\right].$$

b) Se egalează cele două expresii ale probabilității calculate la punctul a).

34. Dacă notăm cu p_k probabilitatea de extragere a unei bile albe din urna k, atunci

$$p_{k+1} = \frac{a+1}{a+b+1} p_k + \frac{a}{a+b+1}(1-p_k) \qquad k = \overline{1, n-1},$$

deoarece

$$p_1 = \frac{a}{a+b}, \text{ se obține } p_n = \frac{a}{a+b}.$$

35. a) $P = \frac{M^n}{N^n}$. Pentru extragerea dintr-o singură urnă sînt M cazuri favorabile (bilele 1,2, ..., M) și N cazuri posibile, deci probabilitatea este $\frac{M}{N}$. Dacă se extrage acum cîte o bilă, din fiecare din cele n urne, extracțiile fiind independente, probabilitatea căutată este produsul probabilității corespunzătoare extracțiilor din fiecare urnă, deci $\frac{M^n}{N^n}$.

b) $Q = 1 - P = 1 - \frac{M^n}{N^n}$.

c) Fie p_k probabilitatea ca cel mai mare număr extras să fie egal cu k. Atunci folosind rezultatul de la punctul a), avem:

$P = p_1 + p_2 + \ldots + p_M = \frac{M^n}{N^n}$, iar $p_1 + p_2 + \ldots + p_{M-1} = \frac{(M-1)^n}{N^n}$, de unde prin scădere se obține $p_M = \frac{M^n}{N^n} - \frac{(M-1)^n}{N^n}$.

36. a) $P = \frac{(N-M+1)^n}{N^n}$; cazurile favorabile pentru extragerea dintr-o singură urnă sînt bilele numerotate cu M, $M+1$, ..., N deci $N - M + 1$ cazuri favorabile.

b) Fie p_k probabilitatea ca cel mai mic număr extras să fie egal cu k. Atunci ținînd seama de punctul a) avem:

$P = p_M + p_{M+1} + \ldots + p_N = \frac{(N-M+1)^n}{N^n}$, iar

$p_{M+1} + p_{M+2} + \ldots + p_N = \frac{(N-M)^n}{N^n}$, de unde prin scădere se obține

$$p_M = \frac{(N-M+1)^n}{N^n} - \frac{(N-M)^n}{N^n}.$$

c) $p_1 + p_2 + \ldots + p_M$.

37. $P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P((E-A) \cap \bar{B}) = P(\bar{B} - (A \cap \bar{B})) = P(\bar{B}) - P(A \cap \bar{B}) = P(\bar{B}) - P(A \cap (E-B)) = P(\bar{B}) - P(A) - P(A \cap B) = P(\bar{B}) - P(A) - P(A)P(B) = P(\bar{A})P(\bar{B})$.

38. Fie A și B evenimentul ca trăgătorul să nimerească în prima țintă la prima tragere respectiv în a doua țintă la a doua tragere. A și B sînt evenimente independente. Avem $P(A \cap B) = P(A)P(B)$ sau $\frac{2}{5} = \frac{4}{5} P(B)$ deci $P(B) = \frac{1}{2}$.

39. Fie A_k evenimentul ca să nu iasă din circuit elementul k, $k = \overline{1, 3}$. $P = P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1)P(A_2)P(A_3) = (1-p_1)(1-p_2)(1-p_3) = 0{,}336$.

40. Primele $n-1$ lămpi înlocuite trebuie să fie bune și a n-a lampă să fie defectă, deci $P = (1-p)^{n-1}p$.

41. a) Pentru ca o persoană de x ani să fie în viață după $t+u$ ani, trebuie ca întîi să fie în viață după t ani și apoi, ajungînd la vîrsta de $x+t$ ani să mai fie în viață după încă u ani, deci ${}_{t+u}p_x = {}_tp_x \cdot {}_up_{x+t}$

b) ${}_tp_x = p_{xt-1}\, p_{x+1}$

${}_{t-1}p_{x+1} = p_{x+1t-2}\, p_{x+2}$

. . . . . .

${}_2p_{x+t-2} = p_{x+t-2} \cdot p_{x+t-1}$

și înmulțind aceste egalități membru cu membru se obține egalitatea cerută.

42. Urmează din: $P(A)P(B/A) = P(B)P(A/B)$.

43. Fie A și B evenimentul ca piesa extrasă să fie bună, respectiv de prima calitate. Atunci $P(A) = 0{,}95$, $P(B/A) = 0{,}68$ și deoarece $B \subset A$, $P(B) = P(A \cap B) = 0{,}95 \cdot 0{,}68 = 0{,}646$.

44. Folosim relația $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ și faptul că $P(A \cup B) \leqslant 1$. Se obține $P(B) - P(A \cap B) \geqslant P(\bar{A})$ sau încă $P(A/B) \leqslant \dfrac{P(B) - P(\bar{A})}{P(B)}$, am ținut seama că $P(A/B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$.

45. a) $P(\bar{A} \cup \bar{B}) = P(\overline{A \cap B}) = 1 - P(A \cap B)$; b) $P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) =$ $= 1 - (P(A) + P(B) - P(A \cap B))$; c) $1 - P(A) + P(A \cap B)$; d) $P(B) - P(A \cap B)$; e) = b); f) = a); g) = d); h) $P(A) + P(B) - P(A \cap B)$; i) $P(A \circ B) = P[(A - B) \cup (B - A)] = P(A \cap \bar{B}) +$ $+ P(B \cap \bar{A}) = P(A) + P(B) - 2P(A \cap B)$.

46. Fie A_1 și A_2 evenimentele de nimerire la țintă a primului, respectiv al celui de-al doilea trăgător. $P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2) = 0{,}7 + 0{,}8 - 0{,}7 \cdot 0{,}8$.

47. Se cere probabilitatea unei reuniuni de evenimente compatibile; fie A_k evenimentul de nimerire la țintă în tragerea k, $k = \overline{1, 3}$; atunci $P = P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = P(A_1) + P(A_2) +$

$+ P(A_3) - P(A_1 \cap A_2) - P(A_1 \cap A_3) - P(A_2 \cap A_3) + P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) =$

$$= \sum_{k=1}^{3} P(A_k) - \sum_{j<k} P(A_j)P(A_k) + P(A_1)P(A_2)P(A_3) = 0{,}96.$$

Se putea mai direct $P = 1 - Q = 1 - P(\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \bar{A}_3) = 1 - P(\bar{A}_1)P(\bar{A}_2)P(\bar{A}_3)$.

48. Fie A_k evenimentul de ieșire din rețea a elementului S_k, $k = \overline{1, 3}$. Calculăm probabilitatea evenimentului contrar:

$$Q = P(\bar{A}_1 \cap (\bar{A}_2 \cup \bar{A}_3)) = P((\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2) \cup (\bar{A}_1 \cap \bar{A}_3)) = P(\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2) + P(\bar{A}_1 \cap \bar{A}_3) -$$

$$- P(\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \bar{A}_1 \cap \bar{A}_3) = 0{,}7 \cdot 0{,}8 + 0{,}7 \cdot 0{,}8 - 0{,}7 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}8 = 0{,}772, \text{ iar } P = 1 - Q = 0{,}228.$$

49. $P = \dfrac{3}{8}$ (vezi problema **24**, §2; se cere aici probabilitatea evenimentului contrar).

50. $P = 1 - 6\left(\dfrac{5}{6}\right)^n + 15\left(\dfrac{4}{6}\right)^n - 20\left(\dfrac{3}{6}\right)^n + 15\left(\dfrac{2}{6}\right)^n - 6\left(\dfrac{1}{6}\right)^n$.

51. Se calculează probabilitatea evenimentului contrar. Fie A_k evenimentul ca a k-piesă controlată să fie bună $k = \overline{1, 4}$.

Evenimentele A_k nu sînt independente.

$$Q = P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4) = P(A_1)P(A_2/A_1)P(A_3/A_1 \cap A_2) \cdot P(A_4/A_1 \cap A_2 \cap A_3) =$$

$$= \frac{98}{100} \cdot \frac{97}{99} \cdot \frac{96}{98} \cdot \frac{95}{97}; \quad P = 1 - Q.$$

52. Numerotăm biletele cumpărate și fie A_k evenimentul ca biletul k, $k = \overline{1, n}$ să fie cîștigător. Atunci $P = P(A_1 \cup \ldots \cup A_n)$.

Se calculează $Q = 1 - P$ folosind formula de înmulțire a probabilităților.

$$Q = P(\bar{A}_1 \cap \ldots \cap \bar{A}_n) = P(\bar{A}_1)P(\bar{A}_2/\bar{A}_1) \ldots P(\bar{A}_n/\bar{A}_1 \cap \ldots \cap A_{n-1}) =$$

$$= \frac{N - M}{N} \cdot \frac{N - M - 1}{N - 1} \cdot \ldots \cdot \frac{N - M - n + 1}{N - n + 1}.$$

53. Se aplică formula probabilității totale. Fie B_1 și B_2 evenimentele de a transfera din urna U_1 în urna U_2 o bilă albă respectiv neagră și A evenimentul de extragere apoi a unei bile albe din urna U_2. Avem $P(A) = P(B_1)P(A/B_1) + P(B_2)P(A/B_2) = \frac{11}{18}$.

54. Se aplică formula probabilității totale:

a) $P = \frac{a_2}{n_2} \cdot \frac{a_1 + 1}{n_1 + 1} + \frac{b_2}{n_2} \cdot \frac{a_1}{n_1 + 1} = \frac{a_1 n_2 + a_2}{(n_1 + 1)n_2}$;

b) $Q = \frac{a_2}{n_2} \cdot \frac{b_1}{n_1 + 1} + \frac{b_2}{n_2} \cdot \frac{b_1 + 1}{n_1 + 1} = \frac{b_1 n_2 + b_2}{(n_1 + 1)n_2} = 1 - P.$

55. Se aplică formula lui Bayes. Fie B evenimentul de extragere a unei bile albe și A_k evenimentul de a se extrage o bilă albă din urna U_k; $k = \overline{1,5}$. $P(A_k) = \frac{1}{5}$, $k = \overline{1, 5}$;

$P(B/A_1) = P(B/A_3) = \frac{2}{5}$; $P(B/A_2) = P(B/A_5) = \frac{1}{5}$; $P(B/A_4) = \frac{4}{5}$, iar

$$P(A_4/B) = \frac{\frac{1}{5} \cdot \frac{4}{5}}{2 \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{2}{5} + 2 \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5} + \frac{1}{5} \cdot \frac{4}{5}} = \frac{2}{5}.$$

56. Se aplică formula lui Bayes. Fie B evenimentul ca cele două bile extrase să fie una albă și una roșie și A_i evenimentul de a se fi făcut extracția din urna U_i, $i = \overline{1, 3}$. Atunci $P(A_i) = \frac{1}{3}$, $i = \overline{1, 3}$; $P(B/A_1) = \frac{1}{5}$; $P(B/A_2) = \frac{1}{3}$; $P(B/A_3) = \frac{2}{11}$ și prin formula lui Bayes se obține $P(A_2/B) = \frac{55}{118}$, $P(A_3/B) = \frac{30}{118}$, deci probabilitatea căutată este

$P = P(A_2/B) + P(A_3/B) = \frac{85}{118}$.

57. Fie C evenimentul ca a doua piesă extrasă să fie un rebut, iar B_1 și B_2 evenimentul de a extrage această piesă din primul lot, respectiv al doilea lot. Aplicînd formula probabilității totale se obține $P(C) = P(B_1)P(C/B_1) + P(B_2)P(C/B_2)$, dar $P(C/B_2) = 0$ iar

$P(C/B_1) = \frac{1}{4}$. $P(B_1)$ se obține aplicînd formula lui Bayes. Fie A_1 și A_2 evenimentele ca prima extracție să se facă din primul, respectiv al doilea lot, iar B evenimentul ca piesa extrasă să fie bună, atunci $P(A_1) = P(A_2) = \frac{1}{2}$, $P(B/A_1) = \frac{3}{4}$, $P(B/A_2) = 1$, iar $P(B_1) = P(A_1/B) = \frac{3}{7}$. Deci $P(C) = \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{7} = \frac{3}{28}$.

58. Se aplică schema lui Bernoulli $P(5;3) = C_5^3(0,8)^3\ (0,2)^2$.

59. Se aplică schema lui Bernoulli:

a) $1 - (1-p)^n$

b) $1 - (1-p)^{n-1}[1 + (n-1)p]$

c) $1 - (1-p)^{n-2}\left[1 + (n-2)p + \frac{(n-1)(n-2)}{2} p^2\right]$.

60. a) $P(10;4) = C_{10}^4\left(\frac{1}{3}\right)^4\left(\frac{2}{3}\right)^6$

b) $\sum_{k=3}^{6} P(10;k)$.

61. $P = \sum_{k=3}^{5} C_8^k(0,4)^k(0,6)^{8-k}$.

62. a) $P(20;14) = C_{20}^{14}(0,4)^{14}(0,6)^6$.

b) $\sum_{k=8}^{20} P(20;k) = \sum_{k=8}^{20} C_{20}^k(0,4)^k(0,6)^{20-k}$

c) $\sum_{k=0}^{18} P(20;k) = 1 - (0,4)^{20} - C_{20}^{19}(0,4)^{19}\,0,6$.

d) $\sum_{k=10}^{16} P(20;k)$.

63. a) Se observă că $\frac{P(n;m+1)}{P(n;m)} = \frac{n-m}{m+1} \cdot \frac{p}{q}$.

b) Probabilitatea $P(n;m)$ considerată ca funcție de m, se comportă astfel: cînd m crește, $P(n,m)$ crește pînă își atinge un maxim, după care descrește.

c) Dacă $np-q$ este un număr întreg, atunci $P(n;m)$ își atinge maximul, pentru două valori ale lui m și anume $m_0 = np-q$ și $m_0 + 1 = np-q+1$. Dacă $np-q$ nu este un număr întreg, atunci $P(n;m)$ își atinge maximul pentru o singură valoare a lui m și anume pentru $[m_0]$, unde $[m_0]$ înseamnă partea întreagă a numărului, deci cel mai mare întreg conținut în acel număr.

64. $[m_0] = [2,5] = 2$.

65. $[40 \cdot 0,3 - 0,7] = 11$.

66. $m_0 = 16$ și $m_0 + 1 = 17$.

67. a) $P = \sum_{k=2}^{10} C_{10}^{k}(0{,}8)^k(0{,}2)^{10-k} = 1 - (0{,}2)^{10} - C_{10}^{1}0{,}8(0{,}2)^9$;

b) 7, căci $np - q = 10 \cdot 0{,}8 - 0{,}2 = 7{,}8$ iar $[7{,}8] = 7$.

68. a) $(0{,}3)^3$.

b) $1 - (0{,}7)^3$.

c) $[4.0{,}7 - 0{,}3] = 2$.

69. a) $P(100; 4) = C_{100}^{4}(0{,}005)^4(0{,}995)^{96}$

b) $P = \sum_{k=0}^{6} P(100; k) = \sum_{k=0}^{6} C_{100}^{k}(0{,}005)^k(0{,}995)^{100-k}$.

c) $[100 \cdot 0{,}005 - 0{,}005] = 99$.

70. Se aplică schema lui Bernoulli cu mai multe stări.

$$P(10;\ 5,\ 4,1) = \frac{10!}{5!\,4!\,1!}(0{,}2)^5(0{,}32)^4(0{,}4)^1.$$

71. Se aplică schema lui Bernoulli cu mai multe stări:

$$p_1 = p_2 = p_3 = p_4 = \frac{1}{4};\quad P(4;\ 1,\ 1,\ 1,\ 1) = \frac{4!}{4^4} = \frac{3}{32}.$$

72. Se aplică schema lui Bernoulli cu mai multe stări.

$$P = P(3;\ 1,\ 1,\ 1,) + P(3;\ 2,\ 0,\ 1) + P(3;\ 1,\ 0,\ 2) = \frac{3!}{1!\,1!\,1!}\,0{,}96 \cdot 0{,}03 \cdot 0{,}01 +$$

$$+ \frac{3!}{2!\,1!}\,(0{,}96)^2 \cdot 0{,}01 + \frac{3!}{1!\,2!}\,0{,}96\,(0{,}01)^2.$$

73. Se aplică schema lui Poisson. Probabilitatea cerută este coeficientul lui x^2 din polinomul $P(x) = \left(\frac{6}{10}x + \frac{4}{10}\right)\left(\frac{4}{10}x + \frac{6}{10}\right)\left(\frac{5}{10}x + \frac{5}{10}\right)$, deci $P = \frac{3}{5}\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{2} + \frac{3}{5}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{5} +$

$$+ \frac{2}{5}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5}.$$

74. Se aplică schema lui Poisson. Probabilitatea cerută este coeficientul lui x din polinomul

$P(x) = (0{,}05x + 0{,}95)\ (0{,}04x + 0{,}96)\ (0{,}06x + 0{,}94)(0{,}03x + 0{,}97)$.

75. Se aplică schema lui Poisson. Probabilitatea cerută este coeficientul lui x^2 din polinomul $P(x) = (0{,}7x + 0{,}3)\ (0{,}8x + 0{,}2)\ (0{,}6x + 0{,}4)$.

76. Se aplică schema lui Poisson. Se formează polinomul

$P(x) = (0{,}8x + 0{,}2)\ (0{,}7x + 0{,}3)(0{,}4x + 0{,}6)\ (0{,}9x + 0{,}1)(0{,}5x + 0{,}5)$

a) coeficientul lui x^3 din $P(x)$;

b) suma coeficienților lui x^2, x^3 și x^4 din polinomul $P(x)$.

77. Se aplică schema bilei neîntoarse. $P = \sum_{k=1}^{4} \frac{C_4^k C_{396}^{10-k}}{C_{400}^{10}} = 0{,}9666.$

78. Se aplică schema bilei neîntoarse. $P_{N-M,M}(n-m,m) = \dfrac{C_{N-M}^{n-m}C_M^m}{C_N^n}$.

79. Se aplică schema bilei neîntoarse. Sînt 4 bile albe și 32 negre.

$$P_{4,32}(1,2) = \frac{C_4^1 C_{32}^2}{C_{36}^3} = \frac{496}{1785} \simeq 0{,}2778.$$

80. Dacă în una din grupe numărul de băieți este egal cu numărul de fete, atunci același lucru se întîmplă și cu cealaltă grupă. Pentru găsirea probabilității ca într-o grupă de 4 elevi formată la întîmplare să fie 2 fete și 2 băieți se aplică schema bilei neîntoarse, deci

$$P = \frac{C_4^2 C_4^2}{C_8^4} = \frac{(4!)^4}{8!2^4}.$$

81. $P = \dfrac{C_{N-m}^{n-m}}{C_N^n}$ (vezi problema 38, § 2).

82. Se aplică schema bilei neîntoarse.

$$P = \frac{C_{10}^1 C_{30}^1}{C_{40}^2} + \frac{C_{10}^2 C_{30}^0}{C_{40}^2}.$$

83. Se aplică schema bilei neîntoarse. $P = P_{4,32}(1,2) + P_{4,32}(2,1) + P_{4,32}(3,0) =$

$$= \frac{C_4^1 C_{32}^2}{C_{36}^3} + \frac{C_4^2 C_{32}^1}{C_{36}^3} + \frac{C_4^3 C_{32}^0}{C_{36}^3} = \frac{109}{3 \cdot 119} \simeq 0{,}3053$$

sau $P = 1 - Q = 1 - \dfrac{C_{32}^3}{C_{36}^3} = 1 - 0{,}6947 \simeq 0{,}3053.$

84. Numărul natural m se găsește din inegalitatea $\sum_{k=1}^{m} \dfrac{C_{100}^k C_{99900}^{m-k}}{C_{10\,000}^m} > 0{,}5$ (sau mai simplu din $1 - \dfrac{C_{99900}^m}{C_{10\,000}^m} > 0{,}5$), luîndu-se cel mai mic număr natural care o satisface, se obține $m = 69$.

Capitolul III

VARIABILE ALEATOARE

§ 1. Noțiuni de bază. Definiții și proprietăți

1, Definiția variabilei aleatoare

Fie $E = \{E_1, ..., E_s\}$ mulțimea evenimentelor elementare ale unei experiențe (fiecare eveniment E_k se realizează printr-o probă și numai prin una). Se reduce studiul mulțimii de evenimente elementare la studiul unei mulțimi de numere *) în felul următor: fiecărui eveniment elementar E_k (deci fiecărei probe a experienței) i se atașează un număr real x_k, deci experienței i se atașează o mulțime de numere reale, fiecare număr avînd o anumită probabilitate și anume probabilitatea evenimentului elementar căruia îi corespunde.

Corespondența dintre mulțimea evenimentelor elementare ale unei experiențe și o mulțime de numere reale se numește *variabilă aleatoare.*

Deoarece considerăm aici numai experiențe cu un număr finit de probe, variabilele aleatoare vor avea o mulțime finită de valori. Unei aceleiași experiențe i se pot atașa mai multe variabile aleatoare (de exemplu la aruncarea zarului, atașarea numărului de puncte ieșit, sau atașarea numărului 0 cînd apare un număr par de puncte și numărului 1 în caz contrar etc.).

Vom nota variabilele aleatoare cu $X, Y, ..., X_1, ...$

Deci o variabilă aleatoare X este o mulțime finită de numere $x_1, ..., x_n$, fiecărui număr x_k corespunzîndu-i o probabilitate p_k și anume, dacă fiecărui eveniment elementar i se atașează o valoare distinctă, atunci $p_k = \frac{1}{s}$, $k = \overline{1, s}$; $n = s$ (numărul evenimentelor elementare), iar dacă aceeași valoare x_k se atașează mai multor evenimente elementare, atunci $p_k = \frac{m_k}{s}$, unde am notat prin m_k numărul tuturor evenimentelor elementare cărora le

*) fapt care a simplificat mult raționamentele și a permis în special introducerea în teoria probabilităților a unor metode și rezultate din alte capitole ale matematicii.

corespunde aceeași valoare x_k, $k = \overline{1, n}$ și $\sum_{k=1}^{n} m_k = s$; deci în toate cazurile $\sum_{k=1}^{n} p_k = 1$. Se mai spune că p_k este probabilitatea cu care variabila aleatoare X ia valoarea x_k și se scrie $p_k = P(X = x_k)$, $k = \overline{1, n}$. Schematic variabila aleatoare X se notează astfel:

$$(1) \qquad X\begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_n \\ p_1 & \dots & p_n \end{pmatrix}^{*)}, \quad \sum_{k=1}^{n} p_k = 1.$$

Tabloul (1) se numește *distribuția* sau *repartiția* variabilei aleatoare X.

Distribuția unei variabile aleatoare X poate fi reprezentată grafic în plan prin *poligonul de repartiție*, care se obține unind printr-o linie poligonală punctele de coordonate (x_k, p_k), $k = \overline{1, n}$; în general pe cele două axe se iau unități de măsură diferite.

2. Distribuții clasice

Dăm cîteva distribuții ale unor variabile aleatoare cu un număr finit de valori, întîlnite des în aplicații.

a) *Distribuția binomială corespunzătoare schemei lui Bernoulli*

Se atașează schemei lui Bernoulli (vezi cap. II, §1) variabila aleatoare X care reprezintă numărul de apariții ale evenimentului A atunci cînd se efectuează n experiențe; X are următorul tablou de distribuție

$$X\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & \dots & k & \dots & n \\ q^n & C_n^1 p q^{n-1} & C_n^2 p^2 q^{n-2} & \dots & C_n^k p^k q^{n-k} & \dots & p^n \end{pmatrix}, \quad \sum_{k=0}^{n} C_n^k p^k q^{n-k} = (p+q)^n = 1$$

b) *Distribuția corespunzătoare schemei lui Poisson*

Se atașează schemei lui Poisson (vezi cap. II, § 1) variabila aleatoare X care reprezintă numărul de apariții ale evenimentului A, atunci cînd se efectuează n experiențe; X are tabloul de distribuție:

$$X\begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & k & \dots & n \\ P_0 & P_1 & \dots & P_k & \dots & P_n \end{pmatrix},$$

în care P_k este coeficientul lui x^k, $k = \overline{0, n}$, din polinomul

$$P(x) = (p_1 x + q_1)(p_2 x + q_2) \dots (p_n x + q_n), \quad \sum_{k=0}^{n} P_k = 1$$

c) *Distribuția corespunzătoare schemei bilei neîntoarse*

Se atașează schemei bilei neîntoarse (vezi cap. II, § 1) variabila aleatoare X

*) Ordinea în care se scriu valorile $x_1, \dots x_n$ nu este esențială, de obicei se scriu în ordine crescătoare, iar pe rîndul doi probabilitățile corespunzătoare.

care reprezintă numărul de bile albe din cele n bile extrase din urnă; X are tabloul de distribuție

$$X\begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & k & \dots & n \\ \frac{C_a^0 C_b^n}{C_{a+b}^n} & \frac{C_a^1 C_b^{n-1}}{C_{a+b}^n} & \dots & \frac{C_a^k C_b^{n-k}}{C_{a+b}^n} & \dots & \frac{C_a^n C_b^0}{C_{a+b}^n} \end{pmatrix}, \quad \sum_{k=0}^{n} \frac{C_a^k C_b^{n-k}}{C_{a+b}^n} = 1.$$

3. Variabile aleatoare independente

Fie variabilele aleatoare X și Y cu tablourile de distribuție

$$X\begin{pmatrix} x_1 \dots x_n \\ p_1 \dots p_n \end{pmatrix}, \quad Y\begin{pmatrix} y_1 \dots y_m \\ q_1 \dots q_m \end{pmatrix}^{*)}$$

Variabilele aleatoare X și Y sînt independente dacă

$$P[(X = x_i) \cap (Y = y_j)] = P(X = x_i)P(Y = y_j) = p_i q_j, \quad i = \overline{1, n}, \quad j = \overline{1, m}.$$

Independența variabilelor aleatoare se extinde la orice număr finit de variabile, fie ele:

$$X^u \begin{pmatrix} x_1^u \dots x_{n_u}^u \\ p_1^u \dots p_{n_u}^u \end{pmatrix} \quad u = \overline{1, r},$$

și revine la

$$P[(X^1 = x_{j_1}^1) \cap (X^2 = x_{j_2}^2) \cap \dots \cap (X^r = x_{j_r}^r)] = P(X^1 = x_{j_1}^1)P(X^2 = x_{j_2}^2) \dots P(X^r = x_{j_r}^r),$$

unde $j_k = \overline{1, n_k}$, $k = \overline{1, r}$.

4. Operații cu variabile aleatoare

În toate cazurile cînd se vor face operații cu variabile aleatoare se va presupune că toate variabilele aleatoare sînt atașate aceleiași experiențe, deci toate variabilele aleatoare sînt definite pe aceeași mulțime de evenimente elementare, fără să mai precizăm aceasta ulterior.

O constantă a poate fi interpretată ca o variabilă definită pe orice mulțime de evenimente elementare și anume că variabila aleatoare care ia valoarea a pentru orice eveniment elementar, deci pe mulțimea tuturor evenimentelor elementare, prin urmare tabloul de distribuție al constantei a, interpretată ca variabilă aleatoare, este

$$a\begin{pmatrix} a \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Din acest motiv se pot face totdeauna operații cu variabile aleatoare și constante și variabilele aleatoare X și a sînt independente.

---

*) În acest caz și în cele ce urmează nu avem legătura obișnuită dintre probabilitățile p_k și q_k deci $q_k \neq 1 - p_k$; am notat pur și simplu probabilitățile variabilei aleatoare X cu p_k, iar ale variabilei aleatoare Y cu q_k.

În toate cele ce urmează vom presupune că variabilele aleatoare X și Y au următoarele tablouri de distribuție:

$$X\begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_n \\ p_1 & \dots & p_n \end{pmatrix}, \qquad Y\begin{pmatrix} y_1 & \dots & y_m \\ q_1 & \dots & q_m \end{pmatrix}$$

a) *Adunarea variabilelor aleatoare*

Variabila aleatoare $X+Y$ are tabloul de distribuție

$$X+Y\begin{pmatrix} x_1+y_1 & x_1+y_2 & \dots & x_i+y_j & \dots & x_n+y_m \\ p_{11} & p_{12} & \dots & p_{ij} & \dots & p_{nm} \end{pmatrix}$$

deci

$$p_{ij}=P(X+Y=x_i+y_j)=P[(X=x_i)\cap(Y=y_j)], \text{ iar } \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} p_{ij}=1.$$

Dacă variabilele aleatoare X și Y sînt independente, atunci $p_{ij}=P(X+Y=x_i+y_j)=p_iq_j$, iar dacă variabilele aleatoare X și Y nu sînt independente, atunci

$$p_{ij}=P(X+Y=x_i+y_j)=P[(X=x_i)\cap(Y=y_j)]=P(X=x_i)P(Y=y_j/X=x_i)=P(Y=y_j)P(X=x_i/Y=y_j).$$

Variabila aleatoare $X+Y$ se numește *suma variabilelor aleatoare* X și Y.

În cazul particular cînd $Y=a$ ($a=\text{const.}$) se obține *suma dintre o constantă și o variabilă aleatoare* și avem:

$$X+a\begin{pmatrix} x_1+a & \dots & x_k+a, & \dots & x_n+a \\ p_1 & \dots & p_k & \dots & p_n \end{pmatrix},$$

deoarece $P(X+a=x_k+a)=P[(X=x_k)\cap(a=a)]=P(X_k=x_k)\cdot P(a=a)=P(X_k=x_k)=p_k$

b) *Înmulțirea variabilelor aleatoare*

Variabila aleatoare XY are tabloul de distribuție

$$XY\begin{pmatrix} x_1y_1 & x_1y_2 & \dots & x_iy_j & \dots & x_ny_m \\ p_{11} & p_{12} & \dots & p_{ij} & \dots & p_{nm} \end{pmatrix}$$

cu

$p_{ij}=P(XY=x_iy_j)=P[(X=x_i)\cap(Y=y_j)]$. Dacă variabilele aleatoare X și Y sînt independente atunci $p_{ij}=p_iq_j$ iar dacă variabilele aleatoare X și Y nu sînt independente atunci $p_{ij}=p_iP(Y=y_j/X=x_i)=q_jP(X=x_i/Y=y_j)$.

Variabila aleatoare XY se numește *produsul variabilelor aleatoare* X și Y.

În cazul particular cînd $Y = a$ (a = const.) se obține *produsul dintre variabila aleatoare X și o constantă a* și avem

$$aX \begin{pmatrix} ax_1 & \dots & ax_k & \dots & ax_n \\ p_1 & \dots & p_k & \dots & p_n \end{pmatrix},$$

deoarece $P(aX = ax_k) = P[(a = a) \cap (X = x_k)] = P(a = a)\, P(X = x_k) = p_k$. Operațiile de sumă și produs se extind la orice număr finit de variabile aleatoare fie ele $X_1, \dots, X_k$, se obține $X_1 + \dots + X_k$ și corespunzător $X_1 \dots X_k$.

În cazul particular cînd $X_1 = \dots = X_k = X$ produsul $X_1 \dots X_k = X^k$ și se obține *puterea unei variabile aleatoare* cu tabloul de distribuție:

$$X^k \begin{pmatrix} x_1^k & \dots & x_n^k \\ p_1 & \dots & p_n \end{pmatrix},$$

deoarece $P(X^k = x_i^k) = P(X = x_i) = p_i$.

c) *Inversa unei variabile aleatoare cu valori nenule*

Dacă variabila aleatoare X ia numai valori nenule, $x_k \neq 0$, $k = \overline{1, n}$, atunci *inversa variabilei aleatoare* X este variabila aleatoare X^{-1} cu tabloul de distribuție

$$X^{-1} \begin{pmatrix} \frac{1}{x_1} & \dots & \frac{1}{x_n} \\ p_1 & \dots & p_n \end{pmatrix}.$$

Se observă că X^{-1} se obține ca un caz particular din X^k pentru $k = -1$.

Dacă variabila aleatoare Y admite inversa Y^{-1}, atunci prin definiție *cîtul* $\frac{X}{Y} = XY^{-1}$, deci

$$\frac{X}{Y} \begin{pmatrix} \frac{x_1}{y_1} & \dots & \frac{x_i}{y_j} & \dots & \frac{x_n}{y_m} \\ p_{11} & \dots & p_{ij} & \dots & p_{nm} \end{pmatrix},$$

cu

$$p_{ij} = P\left(\frac{X}{Y} = \frac{x_i}{y_j}\right) = P[(X = x_i) \cap (Y = y_j)].$$

Se observă că rezultatul oricărei operații cu variabile aleatoare este tot o variabilă aleatoare definită pe aceeași mulțime de evenimente elementare.

5. Valori tipice ale unei variabile aleatoare

Fie X o variabilă aleatoare cu tabloul de distribuție

$$X \begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_n \\ p_1 & \dots & p_n \end{pmatrix}.$$

a) *Valoarea medie*

Se numește valoarea medie a variabilei aleatoare X, pe scurt, media variabilei aleatoare X numărul

$$M(X) = x_1p_1 + \dots + x_np_n = \sum_{k=1}^{n} x_kp_k.$$

Valoarea medie a unei variabile aleatoare are proprietățile:

1. $M(a) = a$, $a = \text{const.}$
2. $M(aX) = aM(X)$
3. $M(X + Y) = M(X) + M(Y)$
4. $M(X + a) = M(X) + a$
5. $M(XY) = M(X)\,M(Y)$ dacă *variabilele aleatoare X și Y sînt independente.*

Proprietățile 3 și 5 se extind la orice număr finit de variabile aleatoare.

Media unei variabile aleatoare X are următoarea interpretare: este valoarea în jurul căreia se grupează valorile variabilei aleatoare X.

b) *Momente*

Se numește *momentul inițial de ordin r* al variabilei aleatoare X, numărul

$$M_r(X) = M(X^r) = \sum_{k=1}^{n} x_k^r p_k.$$

În particular

$$M_1(X) = M(X).$$

Se numește *moment centrat de ordin r al variabilei aleatoare X numărul:*

$$M_r(X - M(X)) = M[(X - M(X))^r] = \sum_{k=1}^{n} (x_k - M(X))^r p_k.$$

Momentul centrat de ordin r al variabilei aleatoare X este momentul inițial de ordin r al variabilei aleatoare $X - M(X)$ numită *abaterea variabilei aleatoare X de la valoarea medie,* pe scurt abaterea variabilei aleatoare X.

Dacă în loc de $M(X)$ se ia orice constantă a se obține *momentul de ordin r raportat la constanta a* al variabilei aleatoare X.

Dacă $a = 0$ se regăsesc momentele inițiale.

c) *Dispersia unei variabile aleatoare*

Se numește dispersia variabilei aleatoare X momentul centrat de ordinul doi al variabilei aleatoare X, deci media pătratului abaterii. Dispersia unei variabile aleatoare X se notează cu $D^2(X)$, și

$$D^2(X) = M[(X - M(X))^2] = \sum_{k=1}^{n} (x_k - M(X))^2 p_k. \tag{2}$$

Dispersia unei variabile aleatoare are proprietățile:

1. $D^2(a) = 0$
2. $D^2(aX) = a^2D^2(X)$
3. $D^2(X + Y) = D^2(X) + D^2(Y)$

dacă variabilele aleatoare X și Y *sînt independente.*

4. $D^2(X + a) = D^2(X)$.
5. $D^2(X - Y) = D^2(X) + D^2(Y)$

unde $X - Y = X + (-1)Y$, variabilele aleatoare X și Y fiind independente.

Proprietatea 3 se extinde la orice număr finit de variabile aleatoare independente.

Cîteodată este mai comod să se folosească în calculul dispersiei, formula

$$D^2(X) = M_2(X) - (M(X))^2 = M(X^2) - (M(X))^2$$

care se obține din relația (2) ridicînd la pătrat variabila aleatoare $X - M(X)$ și folosind proprietățile valorii medii.

Dispersia unei variabile aleatoare X are următoarea interpretare: măsoară gradul de împrăștiere a valorilor variabilei aleatoare X față de valoarea medie. Dacă dispersia este mică valorile variabilei aleatoare sînt grupate într-un interval mic în jurul valorii medii, iar dacă dispersia este mare, valorile variabilei aleatoare sînt împrăștiate într-un interval mare în jurul valorii medii.

În aplicații este mai comod să se folosească ca măsură a împrăștierii valorilor variabilei aleatoare X în jurul valorii medii, numărul $\sigma(X) = \sqrt{D^2(X)}$*), numit ***abaterea medie pătratică*** a variabilei aleatoare X.

Se va observa că pentru orice variabilă aleatoare X media abaterii este zero, $M(X - M(X)) = 0$ și deci media abaterii nu poate caracteriza gradul de împrăștiere a valorilor variabilei aleatoare X față de valoarea medie, de aceea pentru acest lucru se ia media pătratului abaterii, adică dispersia variabilei aleatoare X.

6. Inegalitatea lui Cebîșev**)

Fie X o variabilă aleatoare iar ε un număr pozitiv oarecare, atunci

$$P(|X - M(X)| < \varepsilon) \geqslant 1 - \frac{D^2(X)}{\varepsilon^2},$$

sau trecînd la evenimentul contrar,

$$P(|X - M(X)| \geqslant \varepsilon) \leqslant \frac{D^2(X)}{\varepsilon^2}.$$

---

*) radicalul aritmetic al dispersiei, deci cu semnul + .

**) Cebîșev P.L. (1821—1894) celebru matematician rus.

Pentru $\varepsilon = kD(X)$ se obține

$$P(|X - M(X)| < kD(X)) \geqslant 1 - \frac{1}{k^2},$$

sau

$$P(M(X) - kD(X) < X < M(X) + kD(X)) \geqslant 1 - \frac{1}{k^2}.$$

Inegalitatea lui Cebîșev dă o margine inferioară pentru probabilitatea $P(|X - M(X)| < \varepsilon)$ și se interpretează în felul următor: cu o probabilitate cel puțin egală cu $1 - \frac{D^2(X)}{\varepsilon^2}$, respectiv $1 - \frac{1}{k^2}$, variabila aleatoare X ia valori în intervalul $(M(X) - \varepsilon,\ M(X) + \varepsilon)$ respectiv $(M(X) - kD(X),\ M(X) + kD(X))$, sau ceea ce revine la același lucru, variabila aleatoare $X - M(X)$ adică abaterea lui X de la valoarea medie, ia valori în intervalul $(-\varepsilon,\ \varepsilon)$ corespunzător $(-kD(X),\ kD(X))$.

Se va observa că $1 - \frac{1}{k^2}$ crește odată cu k și că deja pentru $k = 6$, $1 - \frac{1}{k^2} = \frac{35}{36}$, deci ia o valoare apropiată de 1.

Dacă variabila aleatoare X are distribuția binomială, atunci $M(X) = np$, $D^2(X) = npq$ și inegalitatea lui Cebîșev ia forma

$$P(|X - np| < \varepsilon) \geqslant 1 - \frac{npq}{\varepsilon^2},$$

iar pentru variabila aleatoare $Y = \frac{X}{n}$ (frecvența relativă) obținem

$$P(|Y - p| < \varepsilon) \geqslant 1 - \frac{pq}{n\varepsilon^2},$$

deoarece $M(Y) = p$ și $D^2(Y) = \frac{pq}{n}$.

§2. Exerciții și probleme rezolvate

1. *Se aruncă un zar. Să se scrie tabloul de distribuție al variabilei aleatoare care ia ca valori numărul de puncte apărut și să se reprezinte poligonul de repartiție.*

Rezolvare. Variabila aleatoare X poate lua valorile 1, 2, 3, 4, 5, 6 și fiecare valoare cu probabilitatea $\frac{1}{6}$, deci tabloul de distribuție este

$$X\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}.$$

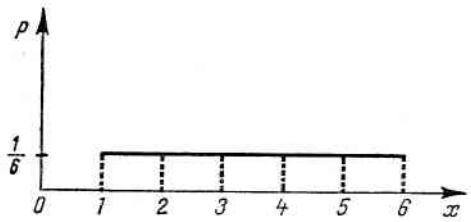


Fig. 4

Poligonul de repartiție este reprezentat în figura 4.

2. *În 3 cutii numerotate de la 1 la 3 se introduc la întîmplare 8 bile. Să se scrie tabloul de distribuție al variabilei aleatoare care ia ca valori numărul de bile din prima cutie.*

Rezolvare. Variabila aleatoare X poate lua valorile 0,1,...,8. Pentru aflarea probabilităților respective, folosim problema **10** § 2, Cap. II; obținem

$$P(X=k)=\frac{C_8^k 2^{8-k}}{3^8},\quad k=\overline{0,8},$$

$$X\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ \frac{2^8}{3^8} & \frac{C_8^1 2^7}{3^8} & \frac{C_8^2 2^6}{3^8} & \frac{C_8^3 2^5}{3^8} & \frac{C_8^4 2^4}{3^8} & \frac{C_8^5 2^3}{3^8} & \frac{C_8^6 2^2}{3^8} & \frac{C_8^7 2}{3^8} & \frac{1}{3^8} \end{pmatrix}.$$

3. *Se face controlul de calitate al unui lot de piese în felul următor: se extrage la întîmplare, pe rînd, cîte o piesă din lot și se cercetează dacă este sau nu admisibilă. Numărul maxim de piese cercetate este 5, iar dacă piesa din extracția de rang k, $k=\overline{1,4}$, nu corespunde, atunci lotul se respinge și nu se mai continuă extracțiile. Să se scrie tabloul de distribuție al variabilei aleatoare care reprezintă numărul de piese cercetate, presupunînd că probabilitatea ca o piesă luată la întîmplare din lot să fie admisibilă este* 0,9.

Rezolvare. Variabila aleatoare X poate lua valorile:

1 cînd prima piesă extrasă este un rebut,

2 cînd prima piesă extrasă este bună, iar a doua un rebut,

3 cînd primele două piese extrase sînt bune, iar a treia un rebut,

4 cînd primele trei piese extrase sînt bune, iar a patra un rebut,

5 cînd primele patru piese extrase sînt bune,

iar

$$P(X=1)=q,\quad P(X=2)=pq,\quad P(X)=3=p^2q$$

$P(X=4)=p^3q$, $P(X=5)=p^4$, unde $p=0{,}9$ iar $q=1-p=0{,}1$.

Se obține

$$X\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0{,}1 & 0{,}09 & 0{,}081 & 0{,}0729 & 0{,}6561 \end{pmatrix}.$$

Dacă $X = k$, $k = \overline{1, 4}$ lotul se respinge, dacă $X = 5$ lotul se respinge sau nu, după cum a cincea piesă cercetată este bună sau rebut.

4. *De-a lungul unei șosele sînt trei bariere de cale ferată păzite. Probabilitatea ca o mașină care circulă pe șosea să găsească oricare din bariere deschisă este* $p = 0{,}8$.

a) *Să se scrie tabloul de distribuție al variabilei aleatoare care reprezintă numărul de bariere trecute de mașină pînă la întîlnirea primei bariere închise.*

b) *Să se reprezinte poligonul de repartiție.*

c) *Care este cel mai probabil număr de bariere găsite deschise de mașină, înainte de prima oprire?*

Rezolvare. a) Variabila aleatoare X poate lua valorile 0, 1, 2 după cum prima barieră închisă întîlnită de mașină pe șosea în ordinea parcurgerii drumului, este prima, a doua, respectiv a treia barieră de pe șosea și valoarea 3 cînd toate cele trei bariere întîlnite erau deschise. Dar

$$P(X = 0) = q = 0{,}2; \quad P(X = 1) = pq = 0{,}8 \cdot 0{,}2 = 0{,}16;$$
$$P(X = 2) = p^2q = (0{,}8)^2 \cdot 0{,}2 = 0{,}128, \quad P(X = 3) = (0{,}8)^3 = 0{,}512,$$

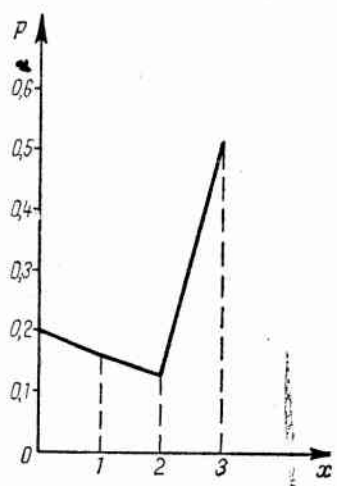


Fig. 5

deci

$$X\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0{,}2 & 0{,}16 & 0{,}128 & 0{,}512 \end{pmatrix}.$$

b) Se obține figura 5. Pe cele două axe de coordonate s-au luat unități de măsură diferite.

c) Este cel mai probabil ca mașina să întîlnească toate cele trei bariere deschise.

5. *Se aruncă de trei ori o monedă. Să se scrie tabloul de distribuție al variabilei aleatoare care ia ca valori numărul de apariții ale stemei. Să se reprezinte poligonul de repartiție.*

Rezolvare. Variabila aleatoare poate lua valorile 0, 1, 2, 3.

Probabilitățile le găsim aplicînd schema lui Bernoulli, ($P(X = k) = C_n^k p^k q^{n-k}$), obținem:

$$P(X = 0) = \left(\frac{1}{2}\right)^3$$

$$P(X = 1) = C_3^1 \left(\frac{1}{2}\right)^3$$

$$P(X = 2) = C_3^2 \left(\frac{1}{2}\right)^3$$

$$P(X = 3) = \left(\frac{1}{2}\right)^3$$

deci

$$X \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0{,}125 & 0{,}375 & 0{,}375 & 0{,}125 \end{pmatrix}$$

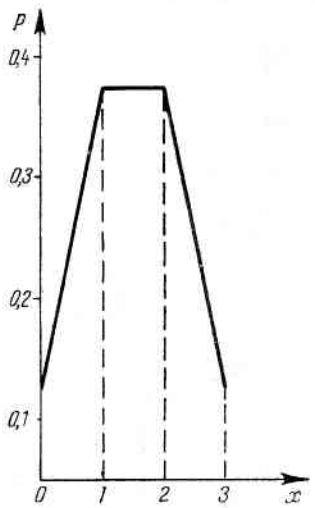


Fig. 6

Variabila aleatoare X are distribuția binomială.

Poligonul de repartiție este reprezentat în figura 6.

6. *La un antrenament un jucător de baschet nimerește în coș la o singură aruncare a mingii cu probabilitatea* 0,7. *Să se scrie tabloul de distribuție al*

variabilei aleatoare care ia ca valori numărul de nimeriri în coș cînd jucătorul aruncă de 10 ori mingea.

Rezolvare. Variabila aleatoare X poate lua valorile 0, 1, ..., 10. Pentru aflarea probabilităților folosim schema lui Bernoulli. Avem $n = 10$, $p = 0{,}7$, $q = 0{,}3$ și deci

$P(X = k) = \mathcal{C}_{10}^{k}(0{,}7)^{k}(0{,}3)^{n-k}$, $k = \overline{0,10}$.

Deci

$$X\begin{pmatrix} 0 & 1 & \ldots\ldots\ldots & 9 & 10 \\ (0{,}3)^{10} & \mathcal{C}_{10}^{1}(0{,}7)(0{,}3)^{9} & \ldots\ldots & \mathcal{C}_{10}^{9}(0{,}7)^{9}0{,}3 & (0{,}7)^{10} \end{pmatrix}^{*)}$$

Variabila aleatoare X are distribuția binomială.

7. *Se experimentează 3 prototipuri de aparate. Probabilitățile ca prototipurile să corespundă sînt respectiv $p_1 = 0{,}9$, $p_2 = 0{,}8$, $p_3 = 0{,}85$. Să se scrie tabloul de distribuție al variabilei aleatoare care ia ca valori numărul de prototipuri care corespund.*

Rezolvare. Variabila aleatoare X poate lua valorile 0, 1, 2, 3. Pentru aflarea probabilităților folosim schema lui Poisson; deci trebuie să calculăm coeficienții lui x^0, x^1, x^2, x^3 din polinomul

$$P(x) = (0{,}9x + 0{,}1)\ (0{,}8x + 0{,}2)\ (0{,}85x + 0{,}15).$$

Se obține

$$X\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0{,}003 & 0{,}56 & 0{,}329 & 0{,}612 \end{pmatrix}$$

8. *Fie trei urne U_i, $i = \overline{1,3}$ cu următoarea compoziție:*

urna	*număr bile albe*	*număr bile negre*
U_1	2	3
U_2	3	2
U_3	2	2

Se extrage din fiecare urnă cîte o bilă. Să se scrie tabloul de distribuție al variabilei aleatoare care reprezintă numărul de bile albe extrase.

Rezolvare. Variabila aleatoare X poate lua valorile 0, 1, 2, 3 iar probabilitățile respective sînt coeficienții lui x^0, x^1, x^2, x^3 din produsul

$\left(\frac{2}{5}x + \frac{3}{5}\right)\left(\frac{3}{5}x + \frac{2}{5}\right)\left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\right)$, deoarece se aplică schema lui Poisson, se obține,

$$X\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ \frac{3}{25} & \frac{19}{50} & \frac{19}{50} & \frac{3}{25} \end{pmatrix}$$

*) Pentru aflarea efectivă a probabilităților se pot folosi tabelele de logaritmi.

9. *Într-un lot de* 100 *de piese prelucrate la un strung,* 10 *sînt rebuturi. Pentru un control de calitate se extrag la întîmplare* 5 *piese din lot. Să se scrie tabloul de distribuție al variabilei aleatoare care ia ca valori numărul de piese rebut dintre cele* 5 *piese extrase.*

Rezolvare. Variabila aleatoare X poate lua valorile 0, 1, 2, 3, 4, 5. Pentru aflarea probabilităților folosim schema bilei neîntoarse

$P(X = k) = \frac{C_{10}^{k} C_{90}^{5-k}}{C_{100}^{5}}$, obținem:

$$P(X = 0) = \frac{C_{10}^{0} C_{90}^{5}}{C_{100}^{5}} = 0{,}583^{*)}$$

$$P(X = 1) = \frac{C_{10}^{1} C_{90}^{4}}{C_{100}^{5}} = 0{,}340$$

$$P(X = 2) = \frac{C_{10}^{2} C_{90}^{3}}{C_{100}^{5}} = 0{,}070$$

$$P(X = 3) = \frac{C_{10}^{3} C_{90}^{2}}{C_{100}^{5}} = 0{,}007$$

$$P(X = 4) = \frac{C_{10}^{4} C_{90}^{1}}{C_{100}^{5}} = 0$$

$$P(X = 5) = \frac{C_{10}^{5} C_{90}^{0}}{C_{100}^{5}} = 0$$

și deci

$$X \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0{,}583 & 0{,}340 & 0{,}070 & 0{,}007 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

10. *La un concurs de pian se prezintă* 12 *concurenți,* 7 *pianiști și* 5 *pianiste. Pentru prezentarea la prima etapă concurenții sînt împărțiți în* 3 *grupe egale, prin tragere la sorți, fiecare grupă prezentîndu-se într-o zi în fața juriului. Să se scrie tabloul de distribuție al variabilei aleatoare care reprezintă numărul de pianiști care se prezintă în prima zi la concurs în fața juriului.*

Rezolvare. Variabila aleatoare poate lua valorile 0, 1, 2, 3, 4, iar pentru aflarea probabilităților folosim schema bilei neîntoarse:

$P(X = k) = \frac{C_{7}^{k} C_{5}^{4-k}}{C_{12}^{4}}$, $k = \overline{0,4}$. Se obține tabloul de distribuție

$$X \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \frac{C_{7}^{0} C_{5}^{4}}{C_{12}^{4}} & \frac{C_{7}^{1} C_{5}^{3}}{C_{12}^{4}} & \frac{C_{7}^{2} C_{5}^{2}}{C_{12}^{4}} & \frac{C_{7}^{3} C_{5}^{1}}{C_{12}^{4}} & \frac{C_{7}^{4} C_{5}^{0}}{C_{12}^{4}} \end{pmatrix}.$$

*) S-au calculat probabilitățile pînă la 3 zecimale exacte.

11. *Tabloul de distribuție al unei variabile aleatoare X este*

$$X\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0{,}2 & 0{,}5 & 0{,}3 \end{pmatrix}$$

Se cere:

a) Distribuția variabilei X^2.

b) Distribuția variabilei $3X$.

c) Distribuția variabilelor: X^{-1}; X^{-2}; $(2X)^{-2}$; $(4X)^{-3}$.

Rezolvare. Avem respectiv:

a) $$X^2\begin{pmatrix} 1 & 4 & 9 \\ 0{,}2 & 0{,}5 & 0{,}3 \end{pmatrix}$$

b) $$3X\begin{pmatrix} 3 & 6 & 9 \\ 0{,}2 & 0{,}5 & 0{,}3 \end{pmatrix}$$

c) $$X^{-1}\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 0{,}2 & 0{,}5 & 0{,}3 \end{pmatrix}; \quad X^{-2}\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{9} \\ 0{,}2 & 0{,}5 & 0{,}3 \end{pmatrix}.$$

Pentru variabila $(2X)^{-2}$ formăm mai întîi distribuția lui $2X$,

$$2X\begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 0{,}2 & 0{,}5 & 0{,}3 \end{pmatrix}$$

și, prin urmare

$$(2X)^{-2}\begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{16} & \frac{1}{36} \\ 0{,}2 & 0{,}5 & 0{,}3 \end{pmatrix}$$

Analog,

$$(4X)^{-3}\begin{pmatrix} \frac{1}{4^3} & \frac{1}{8^3} & \frac{1}{12^3} \\ 0{,}2 & 0{,}5 & 0{,}3 \end{pmatrix}$$

12. *Două variabile aleatoare independente au distribuțiile*

$$X\begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 0{,}2 & 0{,}3 & 0{,}5 \end{pmatrix}; \quad \text{și} \quad Y\begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 0{,}6 & 0{,}2 & 0{,}2 \end{pmatrix}$$

Se cere:

a) distribuția sumei $X + Y$,

b) distribuția produsului XY.

Rezolvare. a) Valorile pe care le ia variabila aleatoare $X + Y$ sînt:

$2 + 1,\ 2 + 4,\ 2 + 6,\ 3 + 1,\ 3 + 4,\ 3 + 6,\ 5 + 1,\ 5 + 4,\ 5 + 6,$

adică

$$3,\quad 6,\quad 8,\quad 4,\quad 7,\quad 9,\quad 6,\quad 9,\quad 11.$$

Vom calcula acum pe rînd probabilităţile de obţinere a fiecărei valori; vom ţine seama că variabilele aleatoare sînt independente. Avem

$$P(X + Y = 3) = P[(X = 2) \cap (Y = 1)] = P(X = 2)P(Y = 1) = \\ = 0{,}2 \cdot 0{,}6 = 0{,}12$$

$$P(X + Y = 6) = P[((X = 2) \cap (Y = 4)) \cup ((X = 5) \cap (Y = 1))] = \\ = P(X = 2)P(Y = 4) + P(X = 5)\,P(Y = 1) = 0{,}2 \cdot 0{,}2 + 0{,}5 \cdot 0{,}6 = 0{,}34$$

$$P(X + Y = 8) = P[(X = 2) \cap (Y = 6)] = P(X = 2)\,P(Y = 6) = 0{,}04$$

$$P(X + Y = 4) = P[(X = 3) \cap (Y = 1)] = P(X = 3)\,P(Y = 1) = 0{,}18$$

$$P(X + Y = 7) = P[(X = 3) \cap (Y = 4)] = P(X = 3)\,P(Y = 4) = 0{,}06$$

$$P(X + Y = 9) = P[((X = 3) \cap (Y = 6)) \cup ((X = 5) \cap (Y = 4))] = \\ = P[(X = 3) \cap (Y = 6)] + P[(X = 5) \cap (Y = 4)] = P(X = 3)P(Y = 6) + \\ + P(X = 5)\,P(Y = 4) = 0{,}16$$

$$P(X + Y = 11) = P[(X = 5) \cap (Y = 6)] = P(X = 5)\,P(Y = 6) = 0{,}10.$$

Tabloul de distribuţie al variabilei aleatoare $X + Y$ este

$$X + Y \begin{pmatrix} 3 & 4 & 6 & 7 & 8 & 9 & 11 \\ 0{,}12 & 0{,}18 & 0{,}34 & 0{,}06 & 0{,}04 & 0{,}16 & 0{,}10 \end{pmatrix}$$

b) Valorile pe care le ia variabila aleatoare XY sînt:

$$2 \cdot 1,\ 2 \cdot 4,\ 2 \cdot 6,\ 3 \cdot 1,\ 3 \cdot 4,\ 3 \cdot 6,\ 5 \cdot 1,\ 5 \cdot 4,\ 5 \cdot 6$$

adică

$$2\ ,\ 8\ ,\ 12\ ,\ 3\ ,\ 12\ ,\ 18\ ,\ 5\ ,\ 20\ ,\ 30.$$

Dar $P(XY = 2) = P[(X = 2) \cap (Y = 1)] = 0{,}12$

$P(XY = 8) = P[(X = 2) \cap (Y = 4)] = 0{,}04$

$P(XY = 12) = P[((X = 2) \cap (Y = 6)) \cup ((X = 3) \cap (Y = 4))] = 0{,}10$

$P(XY = 3) = P[(X = 3) \cap (Y = 1)] = 0{,}18$

$P(XY = 18) = P[(X = 3) \cap (Y = 6)] = 0{,}06$

$P(XY = 5) = P[(X = 5) \cap (Y = 1)] = 0{,}30$

$$P(XY = 20) = P[(X = 5) \cap (Y = 4)] = 0{,}10$$
$$P(XY = 30) = P[(X = 5) \cap (Y = 6)] = 0{,}10,$$

deci tabloul de distribuție al variabilei aleatoare XY este

$$XY \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & 8 & 12 & 18 & 20 & 30 \\ 0{,}12 & 0{,}18 & 0{,}30 & 0{,}04 & 0{,}10 & 0{,}06 & 0{,}10 & 0{,}10 \end{pmatrix}$$

13. *Se aruncă un zar de 3 ori, fie X_1, X_2, X_3 variabile aleatoare care iau drept valori numărul de puncte obținut la prima, a doua, respectiv a treia aruncare. Să se calculeze:*

a) $P(X_1 + X_2 = X_3)$

b) $P(X_1 + X_2 + X_3 = 7)$

c) $P(X_1 + X_2 = 2X_3)$

Rezolvare. a) Ținînd seama că variabilele aleatoare sînt independente, putem scrie

$$P(X_1 + X_2 = X_3) = \sum_{k=1}^{6} P[(X_1 + X_2 = k) \cap (X_3 = k)] = \sum_{k=1}^{6} P(X_1 + X_2 = k) P(X_3 = k).$$

Dar $P(X_3 = k) = \frac{1}{6}$, $k = \overline{1,6}$, iar

$$\sum_{k=1}^{6} P(X_1 + X_2 = k) = P(X_1 + X_2 \leqslant 6) = \frac{15}{36}$$

fiind probabilitatea ca suma punctelor la aruncarea a două zaruri să fie mai mică decît 6, deci $P(X_1 + X_2 = X_3) = \frac{5}{72}$.

b) Se reduce la cazul precedent, considerînd

$$P(X_1 + X_2 + X_3 = 7) = \sum_{k=1}^{5} P(X_3 = k) P(X_1 + X_2 = 7 - k) = \frac{5}{72}.$$

Pentru $k = 6$, obținem:

$$P(X_3 = 6) P(X_1 + X_2 = 7 - 6) = 0.$$

Deoarece $P(X_1 + X_2 = 1) = 0$ (cea mai mică valoare pe care o poate lua $X_1 + X_2$ fiind 2), de aceea în suma precedentă s-a luat $k = \overline{1,5}$.

c) Putem scrie

$$P(X_1 + X_2 = 2X_3) = \sum_{k=1}^{6} P(X_3 = k) P(X_1 + X_2 = 2k) =$$

$$= \sum_{k} \sum_{u} P(X_3 = k)\, P(X_1 = u)\, P(X_2 = 2k - u) = \frac{1}{12}.$$

Aici în sumă dublă indicii k și u nu iau independent valori de la 1 la 6, ci numai acele perechi de valori pentru care $1 \leqslant 2k - u \leqslant 6$, în celelalte cazuri probabilitățile fiind zero, nu le luăm în considerație.

14. *Se consideră ecuația* $ax + by - c = 0$, *unde coeficienții* a, b, c *se determină prin aruncarea unui zar. Care este probabilitatea ca dreapta astfel obținută să treacă prin punctul de coordonate* (1,1)?

Rezolvare. Experienței de aruncare a unui zar îi atașăm variabila aleatoare care ia ca valori numărul de puncte apărut, cu tabloul de distribuție dat în problema **1.**

Cei trei coeficienți ai ecuației date sînt variabile aleatoare independente, fie ele X_1, X_2, X_3 cu același tablou de distribuție. Dreapta trece prin punctul (1,1) cînd $X_1 + X_2 - X_3 = 0$, deci se cere

$$P(X_1 + X_2 - X_3 = 0) = P(X_1 + X_2 = X_3) = \frac{5}{72}$$ (vezi problema precedentă punctul *a*).

15. *Fiecare coeficient al ecuației* $a \sin x - b = 0$, *se obține prin aruncarea unui zar și luarea numărului de puncte obținut. Care este probabilitatea ca ecuația dată să fie compatibilă?*

Rezolvare. Coeficienții ecuației sînt variabile aleatoare legate de aruncarea unui zar; să notăm aceste variabile aleatoare prin X_1, X_2 respectiv; condiția de compatibilitate revine la $\frac{b}{a} \leqslant 1$, deoarece $\frac{b}{a} > 0$ și $\sin x$ ia valori numai în intervalul $[-1,1]$. Deci

$$P\left(\frac{X_2}{X_1} \leqslant 1\right) = P(X_2 \leqslant X_1) = \sum_{k=1}^{6} P(X_1 = k)\, P(X_2 \leqslant k) = \frac{1}{6} \sum_{k=1}^{6} P(X_2 \leqslant k) =$$

$$= \frac{1}{6}\left(\frac{1}{6} + \frac{2}{6} + \frac{3}{6} + \frac{4}{6} + \frac{5}{6} + \frac{6}{6}\right) = \frac{21}{36}.$$

16. *Fiecare cifră a numărului* $10a + b$ *se obține prin extragerea unei bile dintr-o urnă cu* 10 *bile numerotate de la* 0 *la* 9.

a) Să se scrie tabloul de distribuție al variabilei aleatoare care reprezintă suma cifrelor numărului obținut.

b) Care este probabilitatea ca numărul obținut să fie divizibil prin 3?

Rezolvare. a) Experienței de extragere a unei bile din urnă îi atașăm variabila aleatoare X care reprezintă numărul înscris pe bila extrasă; deci va avea tabloul de distribuție

$$X\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ \frac{1}{10} & \frac{1}{10} & \frac{1}{10} & \frac{1}{10} & \frac{1}{10} & \frac{1}{10} & \frac{1}{10} & \frac{1}{10} & \frac{1}{10} & \frac{1}{10} \end{pmatrix}$$

Deci celor două experiențe prin care determinăm cele două cifre ale numărului $10a + b$ le atașăm două variabile aleatoare independente X_1 și X_2 cu tabloul de distribuție al variabilei aleatoare X. În problemă se cere tabloul de distribuție al variabilei aleatoare $X_1 + X_2$. Variabila aleatoare $X_1 + X_2$ poate lua valorile de la 0 la 18. Fie $0 \leqslant k \leqslant 18$, să calculăm

$$P(X_1 + X_2 = k) = \sum_u P(X_1 = u)P(X_2 = k - u) = \frac{1}{10}\sum_u P(X_2 = k - u)$$

unde se sumează numai după acei u cuprinși între 0 și 9 și pentru care avem îndeplinită condiția $0 \leqslant k - u \leqslant 18$. Astfel pentru

$k = 0$ $\quad u = 0$
$k = 1$ $\quad u = 0,\ 1$
$k = 2$ $\quad u = 0,\ 1,\ 2$
$k = 3$ $\quad u = 0,\ 1,\ 2,\ 3$
$k = 4$ $\quad u = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4$
$k = 5$ $\quad u = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5$
$k = 6$ $\quad u = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6$
$k = 7$ $\quad u = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7$
$k = 8$ $\quad u = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,$
$k = 9$ $\quad u = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9$
$k = 10$ $\quad u = \quad 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9$
$k = 11$ $\quad u = \quad\quad 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9$
$k = 12$ $\quad u = \quad\quad\quad 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9$
$k = 13$ $\quad u = \quad\quad\quad\quad 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9$
$k = 14$ $\quad u = \quad\quad\quad\quad\quad 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9$
$k = 15$ $\quad u = \quad\quad\quad\quad\quad\quad 6,\ 7,\ 8,\ 9$
$k = 16$ $\quad u = \quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad 7,\ 8,\ 9$
$k = 17$ $\quad u = \quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad 8,\ 9$
$k = 18$ $\quad u = \quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad 9$

Deci putem scrie

$$P(X_1 + X_2 = k) = \begin{cases} \sum_{u=0}^{k} P(X_1 = u)\ P(X_2 = k - u) = \frac{1}{10}\sum_{u=0}^{k} P(X_2 = k - u) = \\ \qquad = \frac{k+1}{10^2} \text{ dacă } k = \overline{0,9} \\ \sum_{u=k-9}^{9} P(X_1 = u)\ P(X_2 = k - u) = \frac{1}{10}\sum_{u=k-9}^{9} P(X_2 = \\ \qquad = k - u) = \frac{18 - k + 1}{10^2} \text{ dacă } k = \overline{10,18} \end{cases}$$

Se obține tabloul de distribuție

$$X_1 + X_2 \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 \\ \frac{1}{10^2} & \frac{2}{10^2} & \frac{3}{10^2} & \frac{4}{10^2} & \frac{5}{10^2} & \frac{6}{10^2} & \frac{7}{10^2} & \frac{8}{10^2} & \frac{9}{10^2} & \frac{10}{10^2} & \frac{9}{10^2} & \frac{8}{10^2} & \frac{7}{10^2} & \frac{6}{10^2} & \frac{5}{10^2} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 15 & 16 & 17 & 18 \\ \frac{4}{10^2} & \frac{3}{10^2} & \frac{2}{10^2} & \frac{1}{10^2} \end{pmatrix}$$

b) Folosim proprietatea că un număr este divizibil prin 3 cînd suma cifrelor sale considerate ca simple unități este divizibilă prin 3, deci în cazul nostru trebuie să calculăm

$$P\left(\bigcup_{k=0}^{6} (X_1 + X_2 = 3k)\right) = \sum_{k=0}^{6} P(X_1 + X_2 = 3k) =$$

$$= \frac{1}{10^2} + \frac{4}{10^2} + \frac{7}{10^2} + \frac{10}{10^2} + \frac{7}{10^2} + \frac{4}{10^2} + \frac{1}{10^2} = \frac{34}{10^2}.$$

17. *Fiecare coeficient al ecuației* $ax^2 + bx + c = 0$ *se determină prin aruncarea unui zar și luarea numărului de puncte obținut. Care este probabilitatea ca ecuația dată să aibă rădăcini egale? Dar distincte?*

Rezolvare. Experienței de determinare a unui coeficient îi atașăm variabila aleatoare cu tabloul de distribuție

$$X \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$$

Fie X_1, X_2, X_3 variabilele aleatoare corespunzătoare determinării coeficienților a, b, c respectiv; ele sînt independente. Ecuația are rădăcini egale atunci cînd discriminantul $\Delta = 0$, deci se cere

$$P = P(X_2^2 - 4X_1X_3 = 0) = P(X_2^2 = 4X_1X_3) = \sum_k P(X_2^2 = k)\, P\left(X_1X_3 = \frac{k}{4}\right) =$$

$$= \frac{1}{6} \sum_k P\left(X_1X_3 = \frac{k}{4}\right),$$ unde se sumează numai după acei k, numere naturale, care sînt valori ale variabilei aleatoare X_2^2 deci 1, 4, 9, 16, 25, 36 și în plus numărul respectiv este și divizibil prin 4 deoarece variabila aleatoare X_1X_2 ia valori întregi; rămîne deci $k = 4, 16, 36$.

Avem $P = \frac{1}{6}[(P(X_1X_3 = 1) + P(X_1X_3 = 4) + P(X_1X_3 = 9)] = \frac{1}{6}\left(\frac{1}{6^2} + \right.$

$\left. + \frac{3}{6^2} + \frac{1}{6^2}\right) = \frac{5}{6^3}$ (vezi problema **18** pct. b § 3).

Rădăcinile ecuației sînt distincte cînd $\Delta \neq 0$, deci $Q = 1 - P = \frac{211}{216}$.

Observație. Din compararea rezolvărilor acestei probleme, folosind pe de o parte direct definiția clasică a probabilității (vezi problema **15** § 3, cap.II) și pe de altă parte variabilele aleatoare, se vede simplificarea pe care o aduce în raționament folosirea variabilelor aleatoare.

18. *Se consideră numărul complex* $a + ib$, *unde* a *și* b *sînt determinați prin aruncarea unui zar. Se cere probabilitatea ca numărul complex astfel obținut să se găsească pe cercul:*

a) $x^2 + y^2 = 10$

b) $x^2 + y^2 = 3$.

Rezolvare. Celor două experiențe de determinare a numerelor a și b le asociem 2 variabile aleatoare X_1 și X_2 independente cu tabloul de distribuție al variabilei aleatoare din problema **1.**

Un număr complex $z = a + ib$ se găsește pe un cerc cu centrul în origine de rază r (deci cu ecuația $x^2 + y^2 = r^2$) dacă $|z|^2 = r^2$, deci cînd $a^2 + b^2 = r^2$.

a) $P(X_1^2 + X_2^2 = 10) = \sum_k P(X_1^2 = k) P(X_2^2 = 10 - k)$.

Se sumează după acei k, astfel ca atît k cît și $10 - k$ să aparțină mulțimii $\{1, 4, 9, 16, 25, 36\}$, adică valorilor pe care le poate lua pătratul variabilei aleatoare atașate experienței de aruncare a unui zar. Deci

$$P(X_1^2 + X_2^2 = 10) = P(X_1^2 = 1)\, P(X_2^2 = 9) + P(X_1^2 = 9)\, P(X_2^2 = 1) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{2}{36}.$$

b) $P(X_1^2 + X_2^2 = 3) = \sum_k P(X_1^2 = k)\, P(X_2^2 = 3 - k) = 0$, deoarece în acest caz nu există nici un k, în așa fel încît k, $3 - k \in \{1, 4, 9, 16, 25, 36\}$.

19. *Tabloul de distribuție al variabilei aleatoare* X *este*

$$X\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0{,}2 & 0{,}4 & 0{,}4 \end{pmatrix}.$$

Să se calculeze media și dispersia variabilei aleatoare X.

Rezolvare. $M(X) = 1 \cdot 0{,}2 + 2 \cdot 0{,}4 + 3 \cdot 0{,}4 = 2{,}2$.

Pentru $D^2(X) = M[(X - M(X))^2]$ vom găsi întîi tabloul de distribuție al variabilei aleatoare $(X - M(X))^2$, deci

$$(X - M(X))^2 \begin{pmatrix} (-1{,}2)^2 & (-0{,}2)^2 & (0{,}8)^2 \\ 0{,}2 & 0{,}4 & 0{,}4 \end{pmatrix}.$$

$D^2(X) = 1{,}44 \cdot 0{,}2 + 0{,}04 \cdot 0{,}4 + 0{,}64 \cdot 0{,}4 = 0{,}56.$

Se poate calcula dispersia și pe altă cale și anume: folosim formula

$$D^2(X) = M_2(X) - (M(X))^2 = M(X^2) - (M(X))^2 =$$
$$= 1 \cdot 0{,}2 + 4 \cdot 0{,}4 + 9 \cdot 0{,}4 - 4{,}84 = 0{,}56.$$

20. *Se consideră variabilele aleatoare independente*

$$X\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0{,}7 & 0{,}1 & 0{,}2 \end{pmatrix} \text{ și } Y\begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 & 7 \\ 0{,}2 & 0{,}4 & 0{,}1 & 0{,}3 \end{pmatrix}$$

Să se calculeze:

a) $M(2X + 4Y)$; b) $D^2(2X + 4Y)$;

c) *abaterea medie pătratică a variabilei aleatoare* $2X + 4Y$.

Rezolvare. a) $M(2X + 4Y) = 2M(X) + 4M(Y) =$
$= 2(1 \cdot 0{,}7 + 2 \cdot 0{,}1 + 4 \cdot 0{,}2) + 4(1 \cdot 0{,}2 + 4 \cdot 0{,}4 + 6 \cdot 0{,}1 + 7 \cdot 0{,}3) =$
$= 2 \cdot 1{,}7 + 4 \cdot 4{,}5 = 21{,}4.$

b) $D^2(2X + 4Y) = 4D^2(X) + 16D^2(Y).$

Dar

$$D^2(X) = M(X^2) - (M(X))^2 = 1{,}41$$

iar

$$D^2(Y) = 4{,}65 \text{ deci } D^2(2X + 4Y) = 80{,}04.$$

c) $\sigma(2X + 4Y) = \sqrt{80{,}04}.$

21. *Să se calculeze media pentru variabila aleatoare considerată în problema 9.*

Rezolvare. Deoarece în rezolvarea problemei **9** am considerat probabilitățile numai cu 3 zecimale, vom calcula valoarea medie, folosind probabilitățile exacte, adică

$$P(X = k) = \frac{C_{10}^k C_{90}^{5-k}}{C_{100}^5}, \text{ deci}$$

$$M(X) = \sum_{k=0}^{5} k \frac{C_{10}^k C_{90}^{5-k}}{C_{100}^5} = \frac{1}{C_{100}^5} \sum_{k=0}^{5} k\, C_{10}^k C_{90}^{5-k}.$$

Pentru a calcula suma $\sum_{k=0}^{5} k C_{10}^k C_{90}^{5-k}$ observăm că $\sum_{k=0}^{5} C_{10}^k C_{90}^{5-k}$ este coeficientul lui y^5 în produsul $(1 + y)^{10}(1 + y)^{90}$, iar $\sum_{k=0}^{5} k C_{10}^k C_{90}^{5-k}$ este coeficientul lui y^5 în expresia

$$\frac{d}{dt}\{(1 + ty)^{10}(1 + y)^{90}\}\Big|_{t=1} = 10y(1 + y)^{99}.$$

Prin urmare

$$\sum_{k=0}^{5} k\,C_{10}^{k}C_{90}^{5-k} = 10C_{99}^{4} \quad \text{și} \quad M(X) = \frac{10C_{99}^{4}}{C_{100}^{5}} = 0{,}5.$$

22. *Să se calculeze momentul inițial de ordinul k al variabilei aleatoare X care reprezintă numărul de puncte obținute la aruncarea unui zar.*

Rezolvare. Avem

$$M_k(X) = \frac{1}{6}(1^k + 2^k + 3^k + 4^k + 5^k + 6^k).$$

În particular pentru $k = 1$, se obține $M_1(X) = M(X) = \frac{7}{2}$.

23. *În urma unei experiențe poate apare evenimentul A cu probabilitatea p. Se fac n experiențe independente. Se cere media și dispersia numărului de apariții ale evenimentului A.*

Rezolvare. Metoda I. Considerăm variabila aleatoare X care reprezintă numărul de apariții ale evenimentului A. Variabila aleatoare X poate lua valorile $0, 1, \ldots, n$, iar probabilitățile le obținem aplicînd schema lui Bernoulli, $P(X = k) = C_n^k p^k q^{n-k}$ unde $q = 1 - p$, deci variabila aleatoare X are distribuția binomială cu tabloul de distribuție

$$X\begin{pmatrix} 0 & 1 & \ldots & k & \ldots & n \\ q^n & C_n^1 pq^{n-1} & \ldots & C_n^k p^k q^{n-k} & \ldots & p^n \end{pmatrix}.$$

Atunci

$$M(X) = \sum_{k=0}^{n} k\,C_n^k p^k q^{n-k} = \sum_{k=1}^{n} k\,C_n^k p^k q^{n-k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{k\,n!}{k!(n-k)!} p^k q^{n-k} =$$

$$= np \sum_{k=1}^{n} C_{n-1}^{k-1} p^{k-1} q^{n-k} = np \sum_{j=0}^{n-1} C_{n-1}^{j} p^j q^{n-1-j} = np(p+q)^{n-1} = np,$$ am notat aici $j = k - 1$.

$$D^2(X) = M(X^2) - (M(X))^2 = \sum_{k=0}^{n} k^2 C_n^k p^k q^{n-k} - (np)^2.$$

Dar

$$\sum_{k=0}^{n} k^2 C_n^k p^k q^{n-k} = \sum_{k=1}^{n} k^2 \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k q^{n-k} = np \sum_{k=1}^{n} k C_{n-1}^{k-1} p^{k-1} q^{n-k} =$$

$$= np \sum_{k=1}^{n} ((k-1) + 1)\, C_{n-1}^{k-1} p^{k-1} q^{n-k} = np \sum_{j=0}^{n-1} j\, C_{n-1}^{j} p^j q^{n-j-1} +$$

$$+ np \sum_{k=1}^{n} C_{n-1}^{k-1} p^{k-1} q^{n-k} = np(n-1)p + np.$$ Deci $D^2(X) = n^2p^2 - np^2 + np - n^2p^2 = npq$.

Metoda a II-a. Evităm calculul greoi din metoda I, în felul următor: Experienței de rang k îi atașăm variabila aleatoare X_k care poate lua valoarea 1 sau 0, după cum în acea experiență se realizează evenimentul A sau $\bar{A}$, deci X_k are tabloul de distribuție

$$X_k\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ q & p \end{pmatrix}, \quad k = \overline{1,n}.$$

Variabilele aleatoare X_k sînt independente deoarece corespund la experiențe independente, iar

$$X = X_1 + X_2 \ldots + X_n.$$

În adevăr în membrul întîi avem numărul de apariții ale evenimentului A în n experiențe, iar în membrul doi suma numerelor de apariții (0 sau 1) ale evenimentului A în fiecare experiență în parte, deci tot numărul de apariții ale evenimentului A în cele n experiențe. Atunci

$$M(X) = M(X_1) + M(X_2) + \ldots + M(X_n)$$

și variabilele aleatoare X_k, fiind independente

$$D^2(X) = D^2(X_1) + D^2(X_2) + \ldots + D^2(X_n).$$

Dar $M(X_k) = 0q + 1p = p$ iar

$D^2(X) = M(X^2) - (M(X))^2 = p - p^2 = pq$, deci

$$M(X) = np, \; D^2(X) = npq.$$

24. *Se fac n experiențe independente. În urma experienței de rang k poate apărea evenimentul A cu probabilitatea p_k, $k = \overline{1, n}$ (probabilitatea de apariție a evenimentului A variază de la experiență la experiență). Se cere media și dispersia numărului de apariții ale evenimentului A.*

Rezolvare. Fie X variabila aleatoare care reprezintă numărul de apariții ale evenimentului A și X_k variabila aleatoare care ia valoarea 1 sau 0 după cum în experiența de rang k a apărut sau nu evenimentul A, $k = \overline{1, n}$, atunci

$$X = X_1 + X_2 + \ldots + X_n.$$

Avem

$$M(X) = M(X_1) + \ldots + M(X_n)$$

și deoarece variabilele aleatoare X_k sînt independente,

$$D^2(X) = D^2(X_1) + \ldots + D^2(X_n).$$

Dar variabila aleatoare X_k are tabloul de distribuție

$$X_k\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ p_k & q_k \end{pmatrix} \text{ unde } q_k = 1 - p_k,\ k = 1, n,$$

deci

$$M(X_k) = p_k,\ D^2(X_k) = M_2(X) - (M(X))^2 = p_k - p_k^2 = p_k(1 - p_k) = p_k q_k.$$

Prin urmare $M(X) = p_1 + \ldots + p_n$ și $D^2(X) = p_1q_1 + \ldots + p_nq_n$.

Observație. Variabila aleatoare X poate lua valorile 0, 1, ..., n iar probabilitățile se obțin folosind schema lui Poisson. Tabloul de distribuție al variabilei aleatoare X va fi

$$X\begin{pmatrix} 0 & 1 & \ldots & k & \ldots & n \\ P_0 & P_1 & \ldots & P_k & \ldots & P_n \end{pmatrix}$$

unde

$$(p_1x + q_1)(p_2x + q_2) + \ldots + (p_nx + q_n) = P_nx^n + \ldots + P_kx^k + \ldots + P_1x + P_0.$$

Propunem cititorului ca aplicînd definiția mediei și a dispersiei să calculeze $M(X)$ și $D^2(X)$. (vezi G. Mihoc, N. Micu: Elemente de teoria probabilităților și statistică. Proiect de manual pentru clasa a XII-a. Editura didactică și pedagogică, București, 1966, p. 74).

25. *Dintr-o urnă cu a bile albe și b bile negre se fac n extracții de cîte o bilă* ($n \leqslant a + b$), *fără să se repună bila extrasă înapoi în urnă.*

a) Să se scrie tabloul de distribuție al variabilei aleatoare X care reprezintă numărul de bile albe extrase.

b) Să se calculeze media variabilei aleatoare X.

c) Să se calculeze dispersia variabilei aleatoare X.

d) Folosind rezultatele acestei probleme să se găsească soluția problemei 21.

Rezolvare. a) Variabila aleatoare X poate lua valorile 0, 1, ..., n iar probabilitățile le obținem folosind schema bilei neîntoarse, deci $P(X = k) = \frac{C_a^k C_b^{n-k}}{C_{a+b}^n}$, prin urmare variabila aleatoare X are următorul tablou de distribuție

$$X\begin{pmatrix} 0 & 1 & \ldots & k & \ldots & n \\ \frac{C_a^0 C_b^n}{C_{a+b}^n} & \frac{C_a^1 C_b^{n-1}}{C_{a+b}^n} & \ldots & \frac{C_a^k C_b^{n-k}}{C_{a+b}^n} & \ldots & \frac{C_a^n C_b^0}{C_{a+b}^n} \end{pmatrix}$$

b) Pentru a calcula $M(X)$ procedăm astfel: extracției de rang k îi atașăm variabila aleatoare X_k care ia valoarea 1 sau 0, după cum în acea extracție a apărut o bilă albă sau o bilă neagră, atunci

$$X = X_1 + X_2 \ldots + X_n \ .$$

Variabila aleatoare X_1 are tabloul de distribuție

$$X_1\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ q & p \end{pmatrix} \text{ unde } p = \frac{a}{a+b},\ q = 1 - p.$$

Vom arăta că toate variabilele aleatoare X_k, $k = \overline{2, n}$ au același tablou de distribuție ca și X_1. Să calculăm probabilitatea ca în extracția de rang k să apară o bilă albă. Dacă presupunem că din urnă se extrag, pe rînd, toate cele $a + b$ bile, atunci numărul cazurilor posibile este $(a + b)!$, iar numărul cazurilor favorabile ca pe locul k să apară o bilă albă este $a(a + b - 1)!$ (bila albă de pe locul k poate fi luată în a moduri diferite, iar celelalte $a + b - 1$ bile pot ocupa locurile rămase în $(a + b - 1)!$ moduri diferite); deci

$$P(X_k = 1) = \frac{a(a+b-1)!}{(a+b)!} = \frac{a}{a+b} = p.$$

Deci variabila aleatoare X_k are tabloul de distribuție

$$X_k\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ q & p \end{pmatrix},\ k = \overline{1, n}.$$

Cum $M(X_k) = p$ avem $M(X) = M(X_1) + \ldots + M(X_n) = np$.

c) Deoarece variabilele aleatoare X_k *nu sînt independente* *)

$$D^2(X) \neq D^2(X_1) + \ldots + D^2(X_n).$$

Vom calcula dispersia variabilei aleatoare X folosind totuși faptul că $X = X_1 + \ldots + X_n$ în felul următor:

$$D^2(X) = M[(X - M(X))^2] = M[(X_1 + \ldots + X_n - np)^2] =$$

$$= M\left(\sum_{k=1}^{n} X_k^2 + 2\sum_{i<j}^{n} X_iX_j - 2np\sum_{k=1}^{n} X_k + n^2p^2\right) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} M(X_k^2) + 2\sum_{i<j}^{n} M(X_iX_j) - 2np\sum_{k=1}^{n} M(X_k) + n^2p^2.$$

Cum $M(X_k^2) = M(X_k) = p$, $k = \overline{1, n}$, rămîne de calculat $M(X_iX_j)$**), $i<j$. Să găsim mai întîi tabloul de distribuție al variabilei aleatoare X_iX_j. Această variabilă poate lua valorile 0 și 1, dar

$$P(X_iX_j = 1) = P((X_i = 1) \cap (X_j = 1)) = P(X_i = 1)\, P(X_j = 1/X_i = 1) =$$

$$= p \cdot \frac{a-1}{a+b-1},\ \text{deci}\ X_iX_j\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 - p\cdot\dfrac{a-1}{a+b-1} & p\cdot\dfrac{a-1}{a+b-1} \end{pmatrix}$$

---

*) $\dfrac{a}{a+b} = P(X_2 = 1) \neq P(X_2 = 1/X_1 = 1) = \dfrac{a-1}{a+b-1.}$

**) Deoarece variabilele aleatoare X_i, X_j nu sînt independente $M(X_iX_j) \neq M(X_i)\, M(X_j)$.

prin urmare $M(X_iX_j) = p \cdot \frac{a-1}{a+b-1}$. În suma $\sum_{i<j}^{n} M(X_iX_j)$ avem $\mathcal{C}_n^2$ termeni egali deci $2\sum_{i<j}^{n} M(X_iX_j) = n(n-1)\,p\,\frac{a-1}{a+b-1}$.

Prin urmare

$$D^2(X) = np + n(n-1)\,p \cdot \frac{a-1}{a+b-1} - 2n^2p^2 + n^2p^2 =$$

$$= np\left[1 + (n-1)\frac{a-b}{a+b-1} - np\right] = \frac{np}{a+b-1}(a+b-1+na-n-a+1-$$

$$- npa - npb + np) = \frac{npq}{a+b-1}\left(\frac{b}{q} + na - n - \frac{npb}{q}\right) =$$

$$= npq \cdot \frac{a+b-n}{a+b-1}, \quad (q = 1-p).$$

Propunem cititorului să calculeze $M(X)$ și $D^2(X)$ folosind tabloul de distribuție al variabilei aleatoare X de la punctul a) (vezi, G. Mihoc, N. Micu: Elemente de teoria probabilităților și statistică, Proiect de manual pentru clasa a XII-a, 1966, p. 77—78).

d) În cazul problemei **21** avem $a + b = 100$, $a = 10$; $b = 90$; $n = 5$; $p = \frac{1}{10}$; $q = \frac{9}{10}$. Deci $M(X) = np = 5 \cdot \frac{1}{10} = 0{,}5$.

26. *Într-o urnă sînt n bile numerotate de la 1 la n. Se extrag succesiv toate bilele din urnă așezîndu-le în ordinea extragerii. Se cere valoarea medie a numărului de concordanțe (în extracția de rang k a apărut bila cu numărul k)**).

Rezolvare. Fie X variabila aleatoare care reprezintă numărul de concordanțe care se obțin în cele n extracții. Atașăm extracției de rang k variabila aleatoare X_k care ia valoarea 1 sau 0, după cum în acea extracție avem o concordanță sau nu avem o concordanță, atunci

$$X = X_1 + \ldots + X_n$$

și deci

$$M(X) = M(X_1) + \ldots + M(X_n).$$

Revine deci să calculăm $M(X_k)$, $k = \overline{1, n}$; să scriem întîi tabloul de distribuție al variabilei aleatoare X_k.

Toate variabilele aleatoare au același tablou de distribuție.

---

*) vezi problema concordanțelor, problema **24**, § 2, Cap. II.

În adevăr să calculăm $P(X_k = 1)$, pentru aceasta vom presupune că din urnă se extrag pe rînd toate cele n bile, sînt $n!$ cazuri posibile și $(n-1)!$ cazuri favorabile (deoarece bila cu numărul k trebuie să apară în extracția k, iar celelalte $n-1$ bile pot apărea în $(n-1)!$ moduri) deci $P(X_k = 1) = \frac{(n-1)!}{n!} = \frac{1}{n}$, atunci $P(X_k = 0) = 1 - P(X_k = 1) = 1 - \frac{1}{n}$, $k = \overline{1, n}$.
Deci tabloul de distribuție al variabilei aleatoare X_k este

$$X_k \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 - \frac{1}{n} & \frac{1}{n} \end{pmatrix}, \quad k = \overline{1, n}.$$

Atunci

$$M(X_k) = \frac{1}{n} \text{ și } M(X) = n \cdot \frac{1}{n} = 1.$$

Atragem atenția cititorului că $D^2(X) \neq D^2(X_1) + \ldots + D^2(X_n)$ deoarece variabilele aleatoare X_k nu sînt independente.

27. *O urnă conține a bile albe și b negre. Se extrage cîte o bilă din urnă introducîndu-se în urnă de fiecare dată cîte c bile de culoarea extrasă.*

Fie X_n variabila aleatoare atașată extracției de rang n ($n = 1, 2, \ldots$,) și X_n ia valoarea 0 dacă bila extrasă este albă și 1 dacă bila extrasă este neagră.

a) Să se arate că toate variabilele aleatoare X_n ($n = 1, 2, \ldots$) au aceeași distribuție.

b) Notînd cu

$$Y_k = X_1 + X_2 + \ldots + X_k$$

să se calculeze $M(Y_k)$ și $D^2(Y_k)$. Ce reprezintă Y_k?

Rezolvare. a) Vom folosi procedeul inducției complete. Să verificăm întîi afirmația în cazul $n = 2$.

Dacă notăm cu $p = \frac{a}{a+b}$, $q = \frac{b}{a+b}$ atunci variabila aleatoare X_1 are distribuția

$$X_1 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ p & q \end{pmatrix}$$

Să calculăm acum $P(X_2 = 0)$, avem:

$$P(X_2 = 0) = P[(X_2 = 0) \cap ((X_1 = 0) \cup (X_1 = 1))] =$$
$$P[(X_2 = 0) \cap (X_1 = 0)] + P[(X_2 = 0) \cap (X_1 = 1)] =$$
$$= P(X_1 = 0) P(X_2 = 0 / X_1 = 0) + P(X_1 = 1) P(X_2 = 0 / X_1 = 1) =$$
$$= p \cdot \frac{a+c}{a+b+c} + q \cdot \frac{a}{a+b+c} = \frac{a}{a+b} = p, \text{ iar } P(X_2 = 1) = 1 - P(X_2 = 0) =$$
$$= 1 - p = q.$$

Deci variabila aleatoare X_2 are distribuția

$$X_2\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ p & q \end{pmatrix}$$

aceeași ca și X_1.

Presupunem acum (ipoteza inductivă) că variabilele aleatoare $X_1 \dots X_{n-1}$ au aceeași distribuție, deci

$$X_k\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ p & q \end{pmatrix} \text{ pentru } k = \overline{1, n-1},$$

și vom arăta că și variabila aleatoare X_n are această distribuție.

Ca să calculăm $P(X_n = 0)$ ne interesează compoziția urnei după primele $n-1$ extracții. Fie,

$$Y_{n-1} = X_1 + X_2 + \dots + X_{n-1}$$

atunci compoziția urnei înainte de extracția n va depinde de valorile pe care le ia Y_{n-1}.

Astfel dacă $Y_{n-1} = k$ (deci în primele $n-1$ extracții bila neagră a apărut de k ori) urna va avea $a + b + (n-1)c$ bile dintre care $a + (n-k-1)c$ albe și $b + ck$ negre.

Deoarece Y_{n-1} poate lua valorile $0,1, \dots, n-1$ și evenimentele corespunzătoare sînt incompatibile două cîte două, urmează:

(1) $P(X_n = 1) = P[(X_n = 1) \cap ((Y_{n-1} = 0) \cup (Y_{n-1} = 1) \cup \dots \cup (Y_{n-1} = n-1))] = \sum_{k=0}^{n-1} P[(X_n = 1) \cap (Y_{n-1} = k)]$.

Dar

$$P[(X_n = 1) \cap (Y_{n-1} = k)] = P(Y_{n-1} = k)\, P(X_n = 1 / Y_{n-1} = k) = P(Y_{n-1} = k) \frac{b + kc}{a + b + (n-1)c}$$

și revenind la formula (1), urmează

$$P(X_n = 1) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{b + kc}{a + b + (n-1)c} P(Y_{n-1} = k) =$$

$$= \frac{1}{a + b + (n-1)c}\left(b + c \sum_{k=0}^{n-1} k P(Y_{n-1} = k)\right) = \frac{1}{a + b + (n-1)c}\,(b + c M(Y_{n-1}))$$

Dar

$$M(Y_{n-1}) = M(X_1 + \dots + X_{n-1}) = M(X_1) + \dots + M(X_{n-1}) = (n-1)\, M(X_1) = (n-1)q$$

deoarece prin ipoteza inductivă toate variabilele aleatoare $X_1, \dots, X_{n-1}$ au aceeași distribuție iar $M(X_1) = 0 \cdot p + 1 \cdot q = q$.

Prin urmare

$$P(X_n = 1) = \frac{1}{a + b(n-1)c}(b + c(n-1)q) = q \cdot \frac{a + b + c(n-1)}{a + b + c(n-1)} = q.$$

Analog se arată că $P(X_n = 0) = p$. Variabila aleatoare X_n are aceeași distribuție ca și variabilele precedente și anume:

$$X_n \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ p & q \end{pmatrix}$$

b) Deoarece $Y_k = X_1 + \ldots + X_k$ urmează $M(Y_k) = M(X_1) + \ldots + M(X_k) = kq$ (media lui $M(X_j) = q$, $j = \overline{1, k}$).

Întrucît variabilele aleatoare X_k nu sînt independente $D^2(Y_k) \neq D^2(X_1) + \ldots + D^2(X_k)$, de aceea vom calcula $D^2(Y_k)$ în felul următor:

$$D^2(Y_k) = M(Y_k^2) - (M(Y_k))^2 = M(Y_k^2) - k^2q^2.$$

Dar

$$M(Y_k^2) = M[(X_1 + \ldots + X_k)^2] = \sum_{j=1}^{k} M(X_j^2) + 2\sum_{i<j} M(X_iX_j) =$$

$= kM(X_1^2) + 2C_k^2 M(X_1X_2)$, deoarece toate variabilele aleatoare X_k au același tablou de distribuție. Dar $M(X_1^2) = q$, iar

$$X_1X_2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 - q \cdot \frac{b+c}{a+b+c} & q \cdot \frac{b+c}{b+a+c} \end{pmatrix}$$

deoarece $P(X_1X_2 = 1) = P[(X_1 = 1) \cap (X_2 = 1)] = P(X_1 = 1)P(X_2 = 1/X_1 = 1) = q \cdot \frac{b+c}{a+b+c}$. Prin urmare $M(X_1X_2) = q \cdot \frac{b+c}{a+b+c}$. Revenind la $D^2(Y_k)$ obținem

$$D^2(Y_k) = kq + 2C_k^2 q \cdot \frac{b+c}{a+b+c} - k^2q^2 = kq + k(k-1)q \cdot \frac{b+c}{a+b+c} - k^2q^2 =$$

$$= kpq \cdot \frac{1 + kr}{1 + r}, \text{ unde s-a notat } r = \frac{c}{a+b}$$

Y_k reprezintă numărul de bile negre ce apar în k extracții, de felul indicat în problemă.

28. *Să se arate că*

$(M(XY))^2 \leqslant M(X^2)M(Y^2)$ *).

*) Inegalitatea lui Schwarz Karl Hermann Amandus (1854—1928) matematician german.

Rezolvare. Fie t un parametru real, atunci variabila aleatoare $(X + tY)^2$ ia numai valori nenegative, deci, $M((X + tY)^2) \geqslant 0$.

Pe de altă parte, folosind proprietățile mediei (media unei sume de variabile aleatoare este suma mediilor și o constantă poate fi scoasă în fața mediei) urmează

$$0 \leqslant M((X + tY)^2) = M(X^2 + 2tXY + t^2Y^2) = M(X^2) + 2tM(XY) + \\ + t^2M(Y^2),$$

deci

$$t^2M(Y^2) + 2tM(XY) + M(X^2) \geqslant 0.$$

Deoarece coeficientul lui t^2 este $M(Y^2) \geqslant 0$, trinomul va fi nenegativ pentru orice t real, dacă are discriminantul nepozitiv, deci

$$(M(XY))^2 - M(Y^2)M(X^2) \leqslant 0$$

de unde se obține inegalitatea dorită.

29. *Dacă* x_i, $i = \overline{1, n}$ *și* y_j, $j = \overline{1, m}$ *sînt numere reale oarecare iar* $p_i \geqslant 0$, $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$, *și* $q_j \geqslant 0$, $\sum_{j=1}^{m} q_j = 1$, *atunci are loc inegalitatea:*

$$\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} x_iy_jp_iq_j\right)^2 \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2p_i\right)\left(\sum_{j=1}^{m} y_j^2q_j\right).$$

Rezolvare. Se formează variabilele aleatoare independente

$$X\begin{pmatrix} x_1 \dots x_n \\ p_1 \dots p_n \end{pmatrix} \text{ și } Y\begin{pmatrix} y_1 \dots y_m \\ q_1 \dots q_m \end{pmatrix}$$

și se aplică inegalitatea din problema precedentă.

Deoarece

$$M(XY) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} x_iy_jp_iq_j, \quad M(X^2) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2p_i$$

iar $M(Y^2) = \sum_{j=1}^{m} y_j^2q_j$, obținem inegalitatea cerută.

30. *Variabila aleatoare* X *are* $M(X) = 3{,}2$ *și* $D^2(X) = 0{,}64$. *Se cere o margine inferioară pentru probabilitatea* $P(1{,}2 < X < 5{,}2)$.

Rezolvare. Se aplică inegalitatea lui Cebîșev cu $\varepsilon = 2$, deci

$$P(1{,}2 < X < 5{,}2) = P(|X - 3{,}2| < 2) \geqslant 1 - \frac{0{,}64}{4} = 0{,}84.$$

31. *Variabila aleatoare* X *are* $M(X) = 2$ *și momentul inițial de ordin doi* $M_2(X) = \frac{14}{3}$. *Să se găsească o margine inferioară pentru probabilitatea* $P(1 < X < 3)$.

Rezolvare. Se aplică inegalitatea lui Cebîșev, cu $\varepsilon = 1$. Avem $D^2(X) = M_2(X) - (M(X))^2 = \frac{2}{3}$ deci,

$$P(1 < X < 3) = P(|X - 2| < 1) \geqslant 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}.$$

32. *Inegalitatea lui Cebîșev aplicată variabilei* X *cu* $M(X) = 4$ *ne dă,* $P(|X - 4| < 2) \geqslant 0{,}54$. *Se cere dispersia variabilei aleatoare* X.

Rezolvare. Din $\frac{D^2(X)}{\varepsilon^2} = 0{,}46$ se obține $D^2(X) = 4 \cdot 0{,}46 = 1{,}84$.

33. *Se aruncă o monedă de* 100 *de ori. Să se arate că cu o probabilitate mai mare decît* 0,7 *numărul de apariții ale stemei este cuprins între* 40 *și* 60.

Rezolvare. Variabila aleatoare care ia ca valori numărul de apariții ale stemei are distribuția binomială cu $p = \frac{1}{2}$, $M(X) = np = 50$ și $D^2(X) = npq = 25$. Aplicînd inegalitatea lui Cebîșev cu $\varepsilon = 10$, obținem

$$P(40 < X < 60) = P(|X - 50| < 10) \geqslant 1 - \frac{25}{100} = 0{,}75.$$

34. *Se aruncă un zar de* 120 *de ori. Să se găsească o margine inferioară pentru probabilitatea* $P(15 < X < 25)$ *unde* X *reprezintă numărul de apariții ale feței cu șase puncte.*

Rezolvare. Variabila aleatoare X *are distribuția binomială cu* $p = \frac{1}{6}$, deci $M(X) = 20$ iar $D^2(X) = \frac{50}{3}$. Aplicînd inegalitatea lui Cebîșev obținem:

$$P(15 < X < 25) = P(|X - 20| < 5) \geqslant 1 - \frac{50}{25 \cdot 3} = \frac{1}{3}.$$

35. *Fie* X *o variabilă aleatoare de distribuție binomială. Se fac* n *probe independente și fie* $Y = \frac{X}{n}$.

a) Pentru $p = 0{,}4$, $n = 1000$ *să se găsească o margine inferioară pentru probabilitatea* $P(0{,}2 < Y < 0{,}6)$.

b) Fie $p = 0{,}4$. *Să se determine* n *astfel ca*

$$P(|Y - 0{,}4| < 0{,}2) \geqslant 0{,}997.$$

c) Fie $p = 0{,}4$, $n = 100$. *Să se determine* ε *astfel ca* $P(|Y - 0{,}4| < \varepsilon) \geqslant 0{,}76$.

d) Fie $n = 100$. *Să se găsească* p *astfel ca* $P(|Y - p| < 0{,}1) \geqslant 0{,}75$.

Rezolvare. Se aplică inegalitatea lui Cebîșev sub forma

$$P(|Y - p| < \varepsilon) \geqslant 1 - \frac{pq}{n\varepsilon^2}.$$

a) $P(0{,}2 < Y < 0{,}6) = P(|Y - 0{,}4| < 0{,}2) \geqslant 1 - \frac{0{,}4 \cdot 0{,}6}{1000\,(0{,}2)^2} = 0{,}994.$

b) Din $1 - \frac{0{,}4 \cdot 0{,}6}{n\,(0{,}2)^2} = 0{,}997$ urmează $n = 2000$.

c) Din $1 - \frac{0{,}4 \cdot 0{,}6}{100\,\varepsilon^2} = 0{,}76$ se obține $\varepsilon^2 = \frac{1}{100} = 0{,}01$, deci $\varepsilon = 0{,}1$.

d) Din $1 - \frac{p(1-p)}{100 \cdot 0{,}01} = 0{,}75$ se obține $p^2 - p + 0{,}25 = 0$ deci $p = 0{,}5$.

§ 3. Exerciții și probleme propuse

1. Douăsprezece creioane sînt așezate la întîmplare în 2 cutii numerotate. Să se scrie tabloul de distribuție al variabilei aleatoare care reprezintă numărul de creioane din prima cutie.

2. În drumul de la casă la școală un elev are de trecut prin patru intersecții de străzi prevăzute cu semafoare electrice, cu două culori: roșu și verde. Presupunînd că probabilitatea ca să întîlnească un semafor cu lumina roșie este 0,5 pentru oricare din semafoare, să se scrie tabloul de distribuție al variabilei aleatoare X care reprezintă numărul de semafoare cu culoare verde întîlnite de elev pînă la prima întîlnire cu un semafor cu culoare roșie și să se reprezinte poligonul de repartiție.

3. Un jucător de baschet nimerește în coș la o singură aruncare a mingii cu probabilitatea 0,8. Să se scrie tabloul de distribuție al variabilei aleatoare care reprezintă numărul de nimeriri în coș cînd jucătorul aruncă mingea de 4 ori.

4. Doi parteneri, cu forța de joc egală, joacă șah (probabilitatea ca oricare din parteneri să cîștige o partidă este $\frac{1}{2}$).

a) Să se scrie tabloul de distribuție al variabilei aleatoare care reprezintă numărul de partide cîștigate de unul din parteneri atunci cînd se joacă 5 partide.

Să se reprezinte poligonul de repartiție.

5. Un lot de 10 porumbei călători sînt trimiși spre o destinație. Știind că probabilitatea de întoarcere este aceeași pentru fiecare porumbel și egală cu 0,8, să se scrie tabloul de distribuție al variabilei aleatoare care ia ca valori numărul de porumbei întorși.

6. La un concurs de tir, la o armă grea, ținta constă din un disc central și nouă coroane circulare. Probabilitatea ca un maestru al sportului să nimerească în disc la o singură tragere este 0,97. Să se scrie tabloul de distribuție al variabilei aleatoare care reprezintă numărul de muște (nimeriri în disc) realizate de sportiv în 10 trageri.

7. Se face controlul de calitate la un lot de 20 aparate. Probabilitatea ca un aparat să fie respins este 0,1. Se cere tabloul de distribuție al variabilei aleatoare care reprezintă numărul de aparate admise.

8. Se controlează patru loturi de piese prelucrate la patru strunguri. Probabilitatea de a se extrage o piesă rebut din cele patru loturi este 0,01; 0,02; 0,04 și respectiv 0,05. Se extrage la întîmplare cîte o piesă din fiecare lot. Să se scrie tabloul de distribuție al variabilei aleatoare care reprezintă numărul de piese rebut.

9. Cinci trăgători trag asupra unei ținte. Știind că probabilitatea de nimerire a țintei pentru fiecare trăgător este respectiv 0,60; 0,80; 0,50; 0,30 și 0,90 să se scrie tabloul de distribuție al variabilei aleatoare care ia ca valori numărul de nimeriri în țintă la o tragere simultană a celor 5 trăgători.

10. La o consfătuire se convoacă prin telefon 5 persoane. Probabilitatea ca la o singură chemare să se găsească telefonul ocupat este 0,1; 0,01; 0,05; 0,2; 0,07 la fiecare din cele 5 persoane, respectiv.

Să se scrie tabloul de distribuție al variabilei aleatoare care ia ca valori numărul persoanelor anunțate atunci cînd se dă cîte un singur telefon la fiecare persoană.

11. Dintr-o urnă cu 15 bile albe și 5 negre se fac 4 extracții de cîte o bilă, fără a se repune bila extrasă înapoi în urnă. Se cere tabloul de distribuție al variabilei aleatoare care reprezintă numărul de bile albe extrase.

12. La un concurs de muzică ușoară se prezintă 48 de concurenți, 28 cîntăreți și 20 cîntărețe. Prin tragere la sorți sînt repartizați în grupe de cîte 8, fiecare grupă prezentîndu-se într-o zi în fața juriului. Să se scrie tabloul de distribuție al variabilei aleatoare care reprezintă numărul de cîntărețe care se prezintă în fața juriului în prima zi de concurs.

13. Pentru controlul de calitate al unui lot de 100 de piese se extrag deodată 10 piese. Să se scrie tabloul de distribuție al variabilei aleatoare care reprezintă numărul de piese rebut dintre cele 10 piese extrase, dacă probabilitatea de a se extrage o piesă rebut din lot este 0,2.

14. Tabloul de distribuție al unei variabile aleatoare este

$$X\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0{,}2 & 0{,}3 & 0{,}5 \end{pmatrix}$$

Să se scrie tablourile de distribuție ale variabilei aleatoare X^2, X^3, X^{-1}, $3X$, $X - 1$, $(X - 4)^{-1}$.

15. Tabloul de distribuție al variabilei aleatoare X este

$$X\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0{,}2 & 0{,}4 & 0{,}4 \end{pmatrix}$$

Se cere tabloul de distribuție pentru variabila aleatoare X^n.

16. Fie X_1 și X_2 două variabile aleatoare independente date prin tablourile de distribuție

$$X_1\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0{,}5 & 0{,}5 \end{pmatrix}, \qquad X_2\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0{,}7 & 0{,}3 \end{pmatrix}$$

Să se scrie tablourile de distribuție ale variabilelor aleatoare X_1^2, X_2^2, $X_1^2 + X_2^2$, $X_1 + X_2$, $(X_1 + X_2)^2$, $X_1^2 X_2^2$.

17. La un concurs de tir trebuie să se nimerească o țintă formată dintr-un disc circular și două coroane circulare.

Dacă un trăgător nimerește în disc i se acordă 5 puncte, iar dacă nimerește în coroane, i se acordă 3 puncte și respectiv, 2 puncte.

Să se scrie tabloul de distribuție al variabilei aleatoare care reprezintă suma punctelor obținute de un trăgător, în 3 trageri, dacă probabilitățile de a nimeri în disc și în cele două coroane sînt egale cu 0,5; 0,3 și respectiv 0,2.

18. Se aruncă două zaruri. Se cere:

a) Tabloul de distribuție al variabilei aleatoare care reprezintă suma punctelor obținute.

b) Tabloul de distribuție al variabilei aleatoare care reprezintă produsul punctelor obținute.

19. Fiecare cifră a numărului $10^2 a + 10 b + c$ se obține prin extragerea unei bile dintr-o urnă cu 10 bile numerotate de la 0 la 9.

Să se scrie tabloul de distribuție al variabilei aleatoare care reprezintă suma cifrelor numărului obținut.

20. Se consideră ecuația $2x - a = 0$ unde coeficientul a se determină în felul următor: se extrage cîte o bilă din n urne, fiecare urnă conținînd n bile numerotate de la 1 la n, și se alege pentru a cel mai mare număr obținut. Să se determine probabilitatea ca ecuația astfel obținută să admită rădăcina $x = 1$.

21. Fiecare coeficient al ecuației $a \operatorname{tg} x = b$ se obține prin aruncarea unui zar. Se cere probabilitatea ca ecuația obținută să admită soluțiile $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$, k un număr întreg.

22. Coeficienții a și b ai ecuației $ax^2 + by^2 = 10$ se obțin prin aruncarea unui zar. Care este probabilitatea ca ecuația obținută să reprezinte un cerc?

23. Se consideră ecuația $ax^3 + 2x^2 + 2x + d = 0$ unde coeficienții a și d se obțin prin aruncarea unui zar. Care este probabilitatea ca ecuația obținută să fie reciprocă?

24. Se consideră ecuația $x^3 - ax^2 + bx - 1 = 0$ unde coeficienții a și b se obțin prin extragerea unei bile din o urnă cu n bile numerotate de la 1 la n. Care este probabilitatea ca ecuația obținută să fie reciprocă?

25. Semiaxele a și b ale hiperbolei $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ se determină prin extragerea unei bile dintr-o urnă cu n bile numerotate de la 1 la n. Se cere probabilitatea ca

a) hiperbola obținută să fie echilateră;

b) hiperbola obținută să treacă prin punctul de coordonate (1,0).

26. Un mobil se mișcă rectiliniu după legea

$$x = at^2 + bt + c$$

unde x reprezintă spațiul parcurs iar t timpul. Se determină constantele a, b, c prin extragerea unei bile dintr-o urnă cu $n + 1$ bile numerotate de la 0 la n. Să se determine probabilitatea ca

a) mișcarea să fie uniform accelerată ($a \neq 0$);

b) mișcarea să fie uniformă ($a = 0$, $b \neq 0$);

c) viteza să fie de 5 m pe secundă, cînd mobilul se mișcă uniform.

27. Fiecare coeficient al polinomului $x^3 + bx^2 + cx + d$ se obține prin aruncarea unui zar și luarea numărului de puncte obținut. Care este probabilitatea ca polinomul astfel găsit să fie un cub perfect? Să se determine efectiv cuburile perfecte, pentru care probabilitatea este pozitivă.

28. Se determină numerele a, b, c prin aruncarea unui zar de 3 ori. Se cere probabilitatea ca numerele complexe $a + ib$, $2 - ic$ să fie complex conjugate.

29. Se consideră cercul $x^2 + y^2 = 9$ și familia de drepte $x + y - \lambda = 0$. Se cere probabilitatea ca dreapta obținută, luînd pentru parametrul λ numărul de puncte ieșit la aruncarea unui zar să fie tangentă la cerc.

30. *) Fiecare coeficient al ecuației $ax + b = 0$ se obține prin aruncarea unui zar. Care este probabilitatea ca ecuația obținută să aibă rădăcina întreagă?

31. Coeficienții b și c ai ecuației $x^2 - bx + c = 0$ sînt determinați prin aruncarea unui zar. Care este probabilitatea ca ecuația obținută să admită rădăcinile $x_1 = 2$, $x_2 = 3$?

32. Coeficienții ecuației $ax^2 + bx + c = 0$ se determină prin aruncarea unui zar. Care este probabilitatea ca ecuația obținută să admită rădăcinile:

a) $x_1 = 1$, $x_2 = 4$.

b) $x_1 = -1$, $x_2 = -3$.

c) $x_1 = -1$, $x_2 = -7$.

33. Coeficienții a, b, c din ecuația $ax + by = 7 - c$ se obțin prin aruncarea unui zar. Care este probabilitatea ca dreapta obținută să treacă prin punctul de coordonate $(1,1)$?

34. Se consideră sistemul de ecuații liniare:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = 2 \\ a_2x + b_2y = 1 \end{cases}$$

unde fiecare dintre coeficienții a_1, b_1, a_2, b_2 sînt determinați prin aruncarea unui zar și luarea numărului de puncte ieșit. Care este probabilitatea ca sistemul astfel obținut să aibă o soluție unică?

---

*) Se va compara rezolvarea acestei probleme prin folosirea variabilei aleatoare cu rezolvarea din problema 14, § 3, cap. II.

35. Se consideră matricea $M = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix}$ unde elementele a_1, a_2, a_3, a_4 se obțin prin aruncarea unui zar. Care este probabilitatea ca matricea obținută să fie singulară? Dar nesingulară?

36. Se consideră două drepte în plan date prin ecuațiile $a_1x + b_1y = 0$ și respectiv $a_2x + b_2y = 1$, unde coeficienții a_1, b_1, a_2, b_2 se obțin prin aruncarea unui zar. Care este probabilitatea ca cele două drepte să se intersecteze într-un punct?

37. Se consideră dreapta dată prin ecuația $ax + by + c = 0$ unde coeficienții se obțin prin aruncarea unui zar. Care este probabilitatea ca dreapta obținută să treacă prin punctul de coordonate (1,1)?

38. Se dă ecuația $ax + by + c = 0$ unde coeficienții a, b, c sînt determinați prin aruncarea unui zar. Să se determine valorile lui m pentru care probabilitatea ca dreapta obținută să treacă prin punctul $(-m, 1)$ este pozitivă.

39. Se consideră ecuația $ax + by - c = 0$ unde fiecare coeficient se obține prin extragerea unei bile dintr-o urnă cu n bile numerotate de la 1 la n. Care este probabilitatea ca dreapta obținută să treacă prin punctul de coordonate (1,1)?

40. Se dă ecuația $2x^2 + x + 1 = 0$. Care este probabilitatea că aruncînd două zaruri, numerele obținute să fie rădăcinile ecuației date?

41. Se consideră ecuația $x^2 - 4x + 3 = 0$. Se cere probabilitatea ca numerele obținute la aruncarea a două zaruri să fie rădăcinile ecuației date.

42. Semiaxele a și b ale elipsei $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ se determină prin aruncarea unui zar. Care este probabilitatea ca distanța dintre focarele elipsei obținute să fie $2\sqrt{7}$?

43. Coeficienții ecuației $ax^2 + bx + c = 0$ sînt determinați prin aruncarea unui zar. Se cere probabilitatea ca rădăcinile ecuației obținute să fie una inversa celeilalte.

44. Fiecare coeficient al trinomului $y = ax^2 + 2bx + c$ se obține prin aruncarea unui zar. Care este probabilitatea ca trinomul obținut să fie pozitiv pentru orice x real?

45. Fiecare coeficient al ecuației $ax^2 + bx + c = 0$ se obține prin aruncarea unui zar. Care este probabilitatea ca ecuația obținută să admită rădăcini complexe? Dar reale?

46. Se așază la întîmplare 6 mingi în două cutii. Se cere valoarea medie a variabilei aleatoare X care reprezintă numărul de mingi din a doua cutie.

47. Pentru variabila aleatoare din problema **3** să se găsească media, dispersia și abaterea medie pătratică.

48. Pentru variabila aleatoare din problema **4**, să se găsească media și dispersia.

49. Un jucător de baschet nimerește în coș la o singură aruncare a mingii, cu probabilitatea 0,9. Se cere media și dispersia variabilei aleatoare care reprezintă numărul de nimeriri în coș cînd jucătorul aruncă mingea de 5 ori.

50. Un lot de 100 porumbei călători sînt trimiși spre o destinație. Știind că probabilitatea de întoarcere este aceeași pentru fiecare porumbel și egală cu 0,8 să se calculeze:

a) Media, dispersia și abaterea medie pătratică pentru numărul de porumbei care se întorc.

b) Media, dispersia și abaterea medie pătratică pentru numărul de porumbei care nu se mai întorc.

51. Dintr-o urnă cu a bile albe și b bile negre se fac k extracții, punîndu-se de fiecare dată bila extrasă înapoi în urmă. Se cere:

a) Valoarea medie a variabilei aleatoare X care ia ca valori numărul de bile albe extrase.

b) Dispersia variabilei aleatoare X.

52. Se controlează trei loturi de piese prelucrate la trei strunguri. Probabilitatea de a se extrage o piesă rebut din cele 3 loturi este 0,05; 0,02 și respectiv 0,04.

Se extrage la întîmplare cîte o piesă din fiecare lot. Se cere media și dispersia numărului de piese rebut.

53. Pentru variabila aleatoare din problema **8** să se găsească media și dispersia.

54. Se consideră un aparat electric format din cinci elemente numerotate de la 1 la 5, care se pot defecta independent unul de altul. Fie $p_k = 0{,}2 + 0{,}1\ (k - 1)$ probabilitatea ca să se defecteze elementul cu numărul k, $k = \overline{1,5}$. Se cere valoarea medie și dispersia numărului de defecțiuni.

55. Pentru variabila din problema **12** să se calculeze valoarea medie și dispersia.

56. Pentru variabila aleatoare din problema **13** să se găsească media și dispersia.

57. În zece cutii numerotate de la 1 la 10 se introduc la întîmplare 10 bile numerotate de la 1 la 10, cîte o bilă în fiecare cutie. Se cere valoarea medie a numărului de concordanțe (în cutia numerotată cu j s-a introdus bila numerotată cu j).

58. Șase perechi, soț și soție, iau parte la o petrecere. Presupunînd că pentru un dans perechile se formează la întîmplare, se cere valoarea medie a numărului de perechi, soț și soție, care dansează.

59. O întrecere între două cluburi sportive se desfășoară în 10 etape în felul următor. La prima etapă fiecare club este reprezentat de același număr de participanți, toți cu șanse egale la cîștigarea primului loc. Clubul la care aparține cîștigătorul etapei k, $k = \overline{1,9}$, mai introduce 5 sportivi în concurs care vor participa împreună cu ceilalți la etapa $k + 1$. Care este media numărului de etape cîștigate de fiecare club în parte?

60. Variabila aleatoare X este dată prin

$$X\begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_2 \\ 0{,}2 & 0{,}4 & 0{,}4 \end{pmatrix}$$

Să se determine x_1 și x_2 știind că $M(X) = 1{,}4$ iar $x_2 = x_1 + 1$.

61. Să se determine a, p_1 și p_2 din tabloul de distribuție

$$X\begin{pmatrix} 0 & a \\ p_1 & p_2 \end{pmatrix}$$

știind că $M(X) = \frac{1}{2}$ și $M_2(X) = \frac{1}{2}$.

62. Variabila aleatoare X are tabloul de distribuție

$$X\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Să se determine numerele a și b astfel ca $M(Y) = 0$, $D^2(Y) = 1$, unde $Y = aX + b$.

63. Să se calculeze momentul inițial de ordin 3 al abaterii variabilei X, unde tabloul de distribuție al variabilei aleatoare X este

$$X\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

64. Fie variabilele aleatoare X_1 și X_2 independente, date prin tablourile de distribuție

$$X_1\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ \frac{3}{10} & \frac{7}{10} \end{pmatrix} \text{ și } \quad X_2\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ \frac{3}{10} & \frac{1}{5} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Să se calculeze: $M(X_1 + X_2)$; $M(2X_1 + X_2)$; $M(X_1X_2)$; $M(X_1X_2 + 1)$; $M(2X_1X_2)$; $D^2(X_1 + X_2)$; $D^2(2(X_1 + X_2))$; $D^2(2X_1 + 4X_2)$; $D^2(2X_1 + 4X_2 + 6)$.

65. Tabloul de distribuție al variabilei aleatoare X este:

$$X\begin{pmatrix} 1 & 2^2 & \dots & n^2 \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \dots & \frac{1}{n} \end{pmatrix}.$$

Să se calculeze media variabilei aleatoare X.

66. Tabloul de distribuție al variabilei aleatoare X este

$$X\begin{pmatrix} 1 & 2^3 & \dots & n^3 \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \dots & \frac{1}{n} \end{pmatrix}.$$

Să se calculeze media variabilei aleatoare X.

67. Tabloul de distribuție al variabilei aleatoare X este

$$X\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \dots & \frac{1}{n} \end{pmatrix}.$$

a) Să se calculeze media variabilei aleatoare X.

b) Să se calculeze momentele inițiale de ordin 2 și 3 ale variabilei aleatoare X.

68. Să se arate că

$$\left(\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} k^2 j^3\right)^2 \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} k^4\right)\left(\sum_{j=1}^{n} j^6\right).$$

69. Variabila aleatoare X are $M(X) = 20$ și $D^2(X) = 16$.

Se cere o limită inferioară pentru probabilitatea $P(10 < X < 30)$.

70. Variabila aleatoare X are $M(X) = 80$ și $M_2(X) = 6416$.

Să se găsească o limită inferioară pentru probabilitatea $P(40 < X < 120)$.

71. Inegalitatea lui Cebîșev aplicată variabilei aleatoare X cu $M(X) = 3$ ne dă

$$P(|X - 3| < 2) \geqslant 0{,}86.$$

Se cere dispersia variabilei aleatoare X.

72. Variabila aleatoare X are tabloul de distribuție

$$X\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

Se cere o margine inferioară pentru probabilitatea ca variabila aleatoare abaterea $X - M(X)$ să ia valori în intervalul $(-3,3)$.

73. Probabilitatea de apariție a evenimentului A este egală cu $\frac{1}{2}$. Se fac 10 000 de probe independente. Se poate afirma că cu o probabilitate mai mare decît 0,99 numărul de apariții ale evenimentului A va fi cuprins între 4 000 și 6 000?

74. Probabilitatea de apariție a evenimentului A este egală cu 0,25. Se fac 1 000 de probe independente. Să se găsească o limită inferioară a probabilității ca numărul de apariții ale evenimentului A să fie cuprins între 150 și 350.

75. Se fac 200 de extracții cu întoarcerea bilei, într-o urnă cu 60 de bile albe și 40 de bile negre. Se cere o margine inferioară pentru probabilitatea ca numărul de apariții ale bilei albe să fie cuprins între 100 și 140.

76. În aceleași condiții ca în problema precedentă se cere o margine inferioară pentru probabilitatea ca numărul de apariții ale bilei negre să fie cuprins între 60 și 100.

77. Se face controlul de calitate la un lot de piese în felul următor: se cercetează 100 de piese extrase la întîmplare pe rînd cîte una din lot, iar

după cercetare piesa se reintroduce în lot. Presupunînd că probabilitatea ca luînd la întîmplare o piesă din lot să fie admisibilă este 0,9, se cere o margine inferioară pentru probabilitatea ca numărul pieselor admisibile găsite printre cele cercetate să fie cuprins între 80 și 100.

78. Fie X o variabilă aleatoare de distribuție binomială, n numărul probelor independente și $Y = \frac{X}{n}$.

a) Luînd $p = 0{,}6$, $n = 1\,000$ să se găsească o margine inferioară pentru probabilitatea $P(0{,}3 < Y < 0{,}9)$.

b) Luînd $p = 0{,}6$ să se determine n astfel ca $P(|Y - 0{,}6| < 0{,}1) \geqslant 0{,}976$.

c) Luînd $p = 0{,}5$, $n = 500$ să se determine ε astfel ca $P(|Y - 0{,}5| < \varepsilon) \geqslant 0{,}988$.

d) Luînd $n = 500$ să se determine p astfel ca $P(|Y - p| < 0{,}4) \geqslant 0{,}997$.

§ 4. Indicații și răspunsuri

1. $P(X = k) = \frac{C_{12}^k}{2^{12}}$; $k = \overline{0,12}$

2.
$$X\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0{,}5 & 0{,}25 & 0{,}125 & 0{,}0625 & 0{,}0625 \end{pmatrix}$$

Pentru poligonul repartiției se obține figura 7.

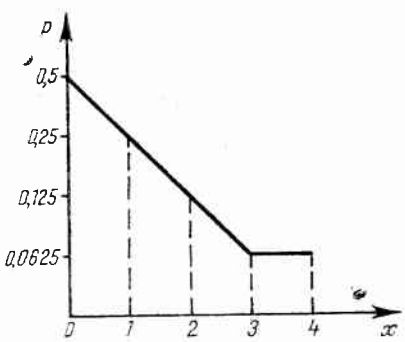


Fig. 7

3. Variabila aleatoare X are distribuția binomială $P(X = k) = C_4^k (0{,}8)^k (0{,}2)^{4-k}$; $k = \overline{0,4}$.

4. a) Variabila aleatoare X are distribuția binomială:

$$P(X = k) = C_5^k \left(\frac{1}{2}\right)^5; \quad k = \overline{0,5}.$$

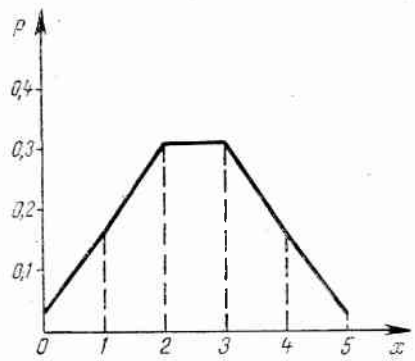


Fig. 8

b) Se obține figura 8. Pe cele două axe nu s-au luat unități de măsură egale.

5. Variabila aleatoare X are distribuția binomială: $P(X = k) = C_{10}^{k}\,(0{,}8)^{k}(0{,}2)^{10-k}$; $k = \overline{0,10}$.

6. Variabila aleatoare X are distribuția binomială $P(X = k) = C_{20}^{k}\,(0{,}97)^{k}\,(0{,}03)^{10-k}$; $k = \overline{0,10}$.

7. Variabila aleatoare X are distribuția binomială

$P(X = k) = C_{20}^{k}\,(0{,}9)^{k}\,(0{,}1)^{20-k}$; $k = \overline{0,20}$.

8. Variabila aleatoare X poate lua valorile 0, 1, 2, 3, 4, iar pentru aflarea probabilităților se folosește schema lui Poisson.

9. Variabila aleatoare poate lua valorile 0, 1, 2, 3, 4, 5. Probabilitățile se obțin folosind schema lui Poisson.

10. Variabila aleatoare poate lua valorile 0, 1, ..., 5, iar probabilitățile se obțin folosind schema lui Poisson.

11.
$$X\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \dfrac{C_{15}^{0}C_{5}^{4}}{C_{20}^{4}} & \dfrac{C_{15}^{1}C_{5}^{3}}{C_{20}^{4}} & \dfrac{C_{15}^{2}C_{5}^{2}}{C_{20}^{4}} & \dfrac{C_{15}^{3}C_{5}^{1}}{C_{20}^{4}} & \dfrac{C_{15}^{4}C_{5}^{0}}{C_{20}^{4}} \end{pmatrix}$$

Se aplică schema bilei neîntoarse.

12. Variabila aleatoare X poate lua valorile 0,1, ..., 8. Probabilitățile se obțin folosind schema bilei neîntoarse:

$$P(X = k) = \frac{C_{20}^{k}C_{28}^{8-k}}{C_{48}^{8}}; \quad k = \overline{0,8}.$$

13. Variabila aleatoare poate lua valorile 0,1, ..., 10. Probabilitățile se obțin folosind schema bilei neîntoarse. În lot sînt 80 piese bune și 20 rebuturi.

14.
$$X^{2}\begin{pmatrix} 1 & 4 & 9 \\ 0{,}2 & 0{,}3 & 0{,}5 \end{pmatrix}; \quad X^{5}\begin{pmatrix} 1 & 32 & 243 \\ 0{,}2 & 0{,}3 & 0{,}5 \end{pmatrix}; \quad X^{-1}\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 0{,}2 & 0{,}3 & 0{,}5 \end{pmatrix};$$

$$3X\begin{pmatrix} 3 & 6 & 9 \\ 0{,}2 & 0{,}3 & 0{,}5 \end{pmatrix}; \quad X-1\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0{,}2 & 0{,}3 & 0{,}5 \end{pmatrix};$$

$$(X-4)^{-1}\begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & -\frac{1}{2} & -1 \\ 0{,}2 & 0{,}3 & 0{,}5 \end{pmatrix}$$

15. $X^n\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0{,}2 & 0{,}4 & 0{,}4 \end{pmatrix}$ dacă $n = 2k$ și $X^n\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0{,}2 & 0{,}4 & 0{,}4 \end{pmatrix}$ dacă $n = 2k+1$.

16. $X_1^2\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0{,}5 & 0{,}5 \end{pmatrix}$; $X_2^2 = X_2$; $X_1^2 + X_2^2\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 5 \\ 0{,}35 & 0{,}15 & 0{,}35 & 0{,}15 \end{pmatrix}$;

$X_1 + X_2\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0{,}35 & 0{,}50 & 0{,}15 \end{pmatrix}$; $(X_1+X_2)^2\begin{pmatrix} 1 & 4 & 9 \\ 0{,}35 & 0{,}50 & 0{,}15 \end{pmatrix}$; $X_1^2X_2^2\begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 0{,}70 & 0{,}15 & 0{,}15 \end{pmatrix}$.

17. $X\begin{pmatrix} 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 15 \\ 0{,}008 & 0{,}036 & 0{,}054 & 0{,}087 & 0{,}180 & 0{,}135 & 0{,}150 & 0{,}225 & 0{,}125 \end{pmatrix}$

18.

a) $X_1\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ \frac{1}{6^2} & \frac{2}{6^2} & \frac{3}{6^2} & \frac{4}{6^2} & \frac{5}{6^2} & \frac{6}{6^2} & \frac{5}{6^2} & \frac{4}{6^2} & \frac{3}{6^2} & \frac{2}{6^2} & \frac{1}{6^2} \end{pmatrix}$

b) $X_2\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 8 & 9 & 10 & 12 & 15 & 16 & 18 & 20 & 24 & 25 & 30 & 36 \\ \frac{1}{6^2} & \frac{2}{6^2} & \frac{2}{6^2} & \frac{3}{6^2} & \frac{2}{6^2} & \frac{4}{6^2} & \frac{2}{6^2} & \frac{1}{6^2} & \frac{2}{6^2} & \frac{4}{6^2} & \frac{2}{6^2} & \frac{1}{6^2} & \frac{2}{6^2} & \frac{2}{6^2} & \frac{2}{6^2} & \frac{1}{6^2} & \frac{2}{6^2} & \frac{1}{6^2} \end{pmatrix}$

19. $X\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 \\ \frac{1}{10^3} & \frac{3}{10^3} & \frac{6}{10^3} & \frac{10}{10^3} & \frac{15}{10^3} & \frac{21}{10^3} & \frac{28}{10^3} & \frac{36}{10^3} & \frac{45}{10^3} & \frac{55}{10^3} & \frac{63}{10^3} & \frac{69}{10^3} & \frac{73}{10^3} & \frac{75}{10^3} & \frac{75}{10^3} \\ 15 & 16 & 17 & 18 & 19 & 20 & 21 & 22 & 23 & 24 & 25 & 26 & 27 & & \\ \frac{73}{10^3} & \frac{69}{10^3} & \frac{63}{10^3} & \frac{55}{10^3} & \frac{45}{10^3} & \frac{36}{10^3} & \frac{28}{10^3} & \frac{21}{10^3} & \frac{15}{10^3} & \frac{10}{10^3} & \frac{6}{10^3} & \frac{3}{10^3} & \frac{1}{10^3} & & \end{pmatrix}$

$P(X_1+X_2+X_3=k) = \sum_u P(X_1=u)\,P(X_2+X_3=k-u) = \sum_u \sum_v P(X_1=u)\,P(X_2=$

$= v)\,P(X_3=k-u-v) = \frac{1}{10^2}\sum_{u,v} P(X_3=k-u-v)$, indicii u și v nu iau independent valorile de la 0 la 9 ci astfel ca $0 \leqslant k-u-v \leqslant 9$.

20. $P\left(\frac{a}{2}=4\right) = P(a=8) = \frac{8^n-7^n}{n^n}$ (vezi problema 35 pct. c, § 3, cap. II).

21. $P(X_1=X_2) = \sum_{k=1}^{6} P(X_1=k)\,P(X_2=k) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$.

22. $P(X_1 = X_2) = \frac{1}{6}$.

23. $P(X_1 = X_2) = \frac{1}{6}$.

24. $P(X_1 = X_2) = \sum_{k=1}^{n} P(X_1 = k)\, P(X_2 = k) = \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n}$.

25. a) $P(X_1 = X_2) = \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n}$.

b) $P\left(\frac{1}{X_1^2} - 1 = 0\right) = P(X_1^2 = 1) = \frac{1}{n}$.

26. a) $P(X_1 \neq 0) = \frac{n}{n+1}$.

b) $P[(X_1 = 0) \cap (X_2 \neq 0)] = P(X_1 = 0)\, P(X_2 \neq 0) = \frac{1}{n+1} \cdot \frac{n}{n+1} = \frac{n}{(n+1)^2}$

c) viteza este derivata spațiului în raport cu timpul; $x = bt + c$, $\dot{x} = b$; $P(X_2 = 5) = \frac{1}{n+1}$.

27. Polinomul trebuie să admită o rădăcină triplă, fie ea α, atunci folosind relațiile dintre rădăcini și coeficienți avem de calculat $P = P(X_1 = -3\alpha)\, P(X_2 = 3\alpha^2)\, P(X_3 = -\alpha^3)$

$P \neq 0$ numai dacă $\alpha = -1$; $P = \frac{1}{6^3}$ iar cubul perfect este $(x+1)^3$

28. $P[(X_1 = 2) \cap (X_2 = X_3)] = P(X_1 = 2)\, P(X_2 = X_3) = \frac{1}{6^2}$.

29. Se elimină y din sistemul $\begin{cases} x^2 + y^2 = 8 \\ x + y = \lambda \end{cases}$

ecuația obținută $2x^2 - 2\lambda x + \lambda^2 - 8 = 0$ trebuie să aibă rădăcină dublă, deci $\Delta = 16 - \lambda^2 = 0$; $P(X^2 = 16) = \frac{1}{6}$.

30. $\sum_{k=1}^{6} P\left(\frac{X_2}{X_1} = k\right) = \sum_{k=1}^{6} P(X_2 = kX_1) = \frac{1}{6} \sum_{k,u} P(X_2 = ku) = \frac{1}{6}\left[\sum_{u=1}^{6} P(X_2 = u) + \right.$

$\left. + \sum_{u=1}^{3} P(X_2 = u) + \sum_{u=1}^{2} P(X_2 = u) + 3P(X_2 = 1)\right] = \frac{14}{36}$.

31. Se folosesc relațiile dintre rădăcini și coeficienți.

$$P[(X_1 = 5) \cap (X_2 = 6)] = P(X_1 = 5)\, P(X_2 = 6) = \frac{1}{6^2}$$

32. a) $P\left[\left(-\frac{X_2}{X_1}=5\right)\cap\left(\frac{X_3}{X_1}=4\right)\right]=P\left(\frac{X_2}{X_1}=-5\right)P\left(\frac{X_3}{X_1}=4\right)=0$ deoarece $P\left(\frac{X_2}{X_1}=\right.$

$\left.=-5\right)=0$, variabilele X_2 și X_1 luînd numai valori pozitive.

b) $P\left[\left(\frac{X_2}{X_1}=4\right)\cap\left(\frac{X_3}{X_1}=3\right)\right]=P(X_2=4X_1)\ P(X_3=3X_1)=P(X_1=1)\ P(X_2=$

$=4)\ P(X_3=3)=\frac{1}{6^3}$

c) $P\left[\left(\frac{X_2}{X_1}=8\right)\cap\left(\frac{X_3}{X_1}=7\right)\right]=0$.

33. $P(X_1+X_2+X_3=7)=\frac{5}{72}$ (vezi problema 13 pct. b § 2).

34. Sistemul are soluție unică cînd $a_1b_2-b_1a_2\neq 0$, deci se cere $P(X_1X_4\neq X_2X_3)=1-$

$-P(X_1X_4=X_2X_3)=1-\frac{86}{6^4}=\frac{1210}{6^4}$

35. Matricea este singulară cînd det $M=0$, deci

$$a_1a_4-a_2a_3=0;\quad P(X_1X_4-X_2X_3=0)=\frac{86}{6^4}$$

iar nesingulară cînd det $M\neq 0$, deci

$$P(X_1X_4-X_2X_3\neq 0)=\frac{1210}{6^4}.$$

36. $P=\frac{1210}{6^4}$.

37. $P\ (X_1+X_2+X_3=0)=0$. Toate dreptele obținute în acest fel nu trec prin nici un punct din primul cadran al axelor de coordonate.

38. Se cer valorile lui m pentru care $P(X_2+X_3=mX_1)>0$; m este orice întreg $1\leqslant$ $\leqslant m\leqslant 12$.

39. $P(X_1+X_2=X_3)=\frac{n-1}{2n^2}$, unde $X_i\begin{pmatrix}1 & 2 & \dots & n\\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \dots & \frac{1}{n}\end{pmatrix}$; $i=\overline{1,3}$.

40. $P\left[\left(X_1+X_2=-\frac{1}{2}\right)\cap(X_1X_2=1)\right]=0$.

41. $P[(X_1+X_2=4)\cap(X_1X_2=3)]=P(X_1=1)\ P(X_2=3)+P\ (X_1=3)\ P(X_2=$

$=1)=\frac{2}{6^2}$.

42. Se aplică formula $2c = 2\sqrt{a^2 - b^2}$; $P(X_1^2 - X_2^2 = 7) = \sum_k P(X_1^2 = k)\, P(X_2^2 = k - 7) = P(X_1^2 = 16)\, P(X_2^2 = 9) = \frac{1}{6^2}$.

43. $P\left(\frac{X_3}{X_1} = 1\right) = P(X_3 = X_1) = \frac{1}{6^2}$.

44. $P(X_2^2 - X_1X_3 < 0) = \sum_k P(X_2^2 = k)\, P(X_1X_3 > k) = \frac{1}{6}\Big[P(X_1X_3 > 1) + P(X_1X_3 > 4) + P(X_1X_3 > 9) + P(X_1X_3 > 16) + P(X_1X_3 > 25) + P(X_1X_3 > 36)\Big] = \frac{95}{6^3}$.

45. $P(X_2^2 - 4X_1X_3 < 0) = \sum_k P(X_2^2 = k)\, P(4X_1X_3 > k) = \frac{1}{6}[P(4X_1X_3 > 1) + P(4X_1X_3 > 4) + P(4X_1X_3 > 9) + P(4X_1X_3 > 16) + P(4X_1X_3 > 25) + P(4X_1X_3 > 36)] = \frac{164}{6^3}$.

$Q = 1 - P = \frac{52}{6^3}$.

46. $X\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \frac{1}{2^6} & \frac{6}{2^6} & \frac{15}{2^6} & \frac{20}{2^6} & \frac{15}{2^6} & \frac{6}{2^6} & \frac{1}{2^6} \end{pmatrix}$ iar $M(X) = 3$.

47. $M(X) = 3{,}2$; $D^2(X) = 0{,}64$; $\sigma(X) = 0{,}8$.

48. $M(X) = 5 \cdot \frac{1}{2} = 2{,}5$ $\qquad D^2(X) = 5 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{5}{4}$.

49. Variabila aleatoare are distribuție binomială $M(X) = 4{,}5$ iar $D^2(X) = 0{,}45$.

50. Variabilele aleatoare X_1 și X_2 au distribuție binomială.

a) $M(X_1) = 100 \cdot 0{,}8 = 80$; $D^2(X_1) = 100 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}2 = 16$; $\sigma(X_1) = 4$.

b) $M(X_2) = 100 \cdot 0{,}2 = 20$; $D^2(X_2) = 16$; $\sigma(X_2) = 4$.

51. Variabila aleatoare X are distribuție binomială;

a) $M(X) = \frac{ka}{a+b}$. b) $D^2(X) = k\,\frac{ab}{(a+b)^2}$.

52. $M(X) = 0{,}11$; $D^2(X) = 0{,}05 \cdot 0{,}95 + 0{,}02 \cdot 0{,}98 + 0{,}04 \cdot 0{,}96$. (vezi problema **24**, § 2).

53. $M(X) = 0{,}12$; $D^2(X) = 0{,}01 \cdot 0{,}99 + 0{,}02 \cdot 0{,}98 + 0{,}04 \cdot 0{,}96 + 0{,}05 \cdot 0{,}95$.

54. Elementului cu numărul k i se asociază variabila aleatoare X_k care ia valoarea 1 sau după cum elementul se defectează sau nu, deci

$$X_k\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0{,}2 + 0{,}1(k-1) & 0{,}8 - 0{,}1(k-1) \end{pmatrix}; \quad k = \overline{1,5}.$$

Variabila aleatoare X care dă numărul de defecțiuni este $X = X_1 + \ldots + X_5$, deci $M(X) = M(X_1) + \ldots + M(X_5)$ și deoarece variabilele aleatoare X_k sînt independente $D^2(X) = D^2(X_1) + \ldots + D^2(X_5)$. Dar $M(X_k) = 0{,}2 + 0{,}1\ (k-1)$, iar $D^2(X_k) = (0{,}2 + 0{,}1(k-1)) \cdot (0{,}8 - 0{,}1(k-1))$. Se obține $M(X) = 2$, $D^2(X) = 1{,}91$.

Se obține direct rezultatul folosind problema **24**, § 2.

55. $M(X) = 8 \cdot \frac{20}{48} = \frac{10}{3}$ $D^2(X) = 8 \cdot \frac{20}{48} \cdot \frac{28}{48} \cdot \frac{48-8}{48-1} = \frac{700}{423}$ (vezi problema **25**, § 2.),

56. $M(X) = 2$. $D^2(X) = 10 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}8 \frac{90}{99}$ (vezi problema **25**, § 2).

57. $M(X) = 1$. (vezi problema **26**, § 2).

58. $M(X) = 1$. (vezi problema **26**, § 2).

59. $M(X_1) = M(X_2) = 5$ (vezi problema **27**, § 2; $p = q = \frac{1}{2}$, $n = 10$).

60. $x_1 = 1$, $x_2 = 2$.

61. Se obține sistemul:

$$\begin{cases} p_1 + p_2 = 1 \\ ap_2 = \frac{1}{2} \\ a^2 p_2 = \frac{1}{2}, \text{ de unde } a = 1,\ p_1 = p_2 = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

62. a și b se determină din sistemul:

$$\begin{cases} \frac{a}{2} + b = 0 \\ \frac{a^2}{4} = 1, \text{ deci soluțiile posibile sînt: } a = 2,\ b = -1 \text{ și } a = -2,\ b = 1. \end{cases}$$

63. $M_3(X - M(X)) = M((X - M(X))^3) = \frac{9}{32}$.

64. $M(X_1 + X_2) = M(X_1) + M(X_2) = \frac{11}{10} + \frac{1}{5} = \frac{13}{10}$,

$M(2X_1 + X_2) = 2M(X_1) + M(X_2) = \frac{12}{5}$, $M(X_1X_2) = M(X_1)\ M(X_2) = \frac{11}{50}$; $M(X_1X_2 + 1) = M(X_1X_2) + 1 = \frac{61}{50}$; $M(2X_1X_2) = 2M(X_1X_2) = \frac{11}{25}$; $D^2(X_1 + X_2) = D^2(X_1) + D^2(X_2) = \frac{189}{100} + \frac{19}{25} = 2{,}65$; $D^2(2(X_1 + X_2)) = 4D^2(X_1 + X_2) = 10{,}6$; $D^2(2X_1 + 4X_2) = 4D^2(X_1) + 16\ D^2(X_2) = 19{,}72$

$D^2(2X_1 + 4X_2 + 6) = D^2(2X_1 + 4X_2) = 19{,}72$.

65. $M(X) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{(n+1)(2n+1)}{6}$.

66. $M(X) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} k^3 = n\left(\frac{n+1}{2}\right)^2$.

67. a) $M(X) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n+1}{2}$.

b) $M_2(X) = M(X^2) = \frac{(n+1)(2n+1)}{6}$ (vezi problema **65**)

$M_3(X) = M(X^3) = n\left(\frac{n+1}{2}\right)^2$ (vezi problema **66**).

68. Se aplică inegalitatea lui Schwarz variabilelor aleatoare din problemele **65** și **66**.

69. Se aplică inegalitatea lui Cebîșev.

$$P(10 < X < 30) = P(|X - 20| < 10) \geqslant 1 - \frac{16}{100} = 0{,}84.$$

70. Se aplică inegalitatea lui Cebîșev $D^2(X) = M_2(X) - (M(X))^2 = 16$ iar $P(40 < X < 120) = P(|X - 80| < 40) \geqslant 1 - \frac{16}{1600} = 0{,}99$.

71. Din $0{,}14 = \frac{D^2(X)}{\varepsilon^2}$ urmează $D^2(X) = 4 \cdot 0{,}14 = 0{,}56$.

72. Se aplică inegalitatea lui Cebîșev cu $\varepsilon = 3$, $D^2(X) = \frac{15}{4}$

deci

$$P(|X - M(X)| < 3) \geqslant 1 - \frac{15}{4 \cdot 9} = 0{,}59$$

73. Da. Variabila aleatoare X are distribuția binomială, deci

$$P(|X - 5000| < 1000) \geqslant 1 - \frac{2500}{1000^2} = 0{,}9975.$$

74. Variabila aleatoare X are distribuția binomială,

$$P(|X - 250| < 100) \geqslant 1 - \frac{3000}{100^2 \cdot 16} = 0{,}981.$$

75. 0,88. Se aplică inegalitatea lui Cebîșev.

76. 0,88.

77. 0,91.

78. Vezi problema **35** § 2. a) 0,9974. b) $n = 1000$; c) $\varepsilon = 0{,}2$; d) $p = 0{,}4$ și $p = 0{,}6$.

Capitolul IV

ELEMENTE DE STATISTICĂ MATEMATICĂ

§1. Noțiuni de bază ale statisticii matematice

1. Populație statistică. Frecvențe

În statistica matematică, în scopul aplicării ei la studiul fenomenelor social-economice, se întîlnesc probleme legate de analizarea și sistematizarea datelor privitoare la fenomenele cercetate și de concluziile bazate pe aceste analize, care să descrie într-o anumită formă desfășurarea lor în viitor.

Exemple: Fenomenul de apariție a unei epidemii într-o populație omenească; fenomenul de apariție de piese rebut într-o mulțime de piese fabricate la aceeași mașină unealtă; evoluția precipitațiilor atmosferice în ultima sută de ani ș.a.

Cercetarea unui fenomen cu ajutorul metodelor statisticii matematice vom numi-o cercetare statistică sau analiză statistică a fenomenului.

În general, fenomenele care sînt abordate în cercetarea statistică apar ca manifestări sau evoluții ale unor caracteristici ale elementelor unei mulțimi. De exemplu, fenomenul de apariție a rebuturilor într-o mulțime de 10 000 de bile de oțel poate fi determinat de variațiile diametrului bilelor.

Definiție. Mulțimea de elemente care se cercetează în statistică poartă numele de *populație statistică* sau, simplu, *populație*.

În exemplele de mai sus am întîlnit o populație omenească, o populație de piese fabricate la aceeași mașină-unealtă, o populație formată dintr-o sută de ani, o populație formată din 10 000 bile de oțel.

Obiectele care alcătuiesc o populație statistică se numesc *indivizi* sau *unități statistice*.

Analiza statistică poate avea în vedere una sau mai multe caracteristici.

Spre exemplu, o populație de brazi dintr-o plantație se poate cerceta după înălțimea brazilor și vîrsta lor. La o populație de 10 000 de pui nou născuți se pot cerceta sexul și greutatea lor.

Caracteristicile care se pot măsura se numesc *cantitative*. Printre acestea se pot da ca exemple, pentru populații umane: înălțimea, talia, vîrsta, nu-

mărul de copii dintr-o familie, pentru populații de piese: dimensiunile unei piese etc.

Aceste caracteristici apar ca funcții definite pe populația statistică cu valori numerice. De aceea în cele ce urmează, caracteristicile le vom numi uneori variabile.

Spre deosebire de caracteristicile cantitative există caracteristici care nu se pot măsura ca: starea civilă, sexul, culoarea feței etc. care se numesc *calitative.*

Caracteristicile cantitative care pot lua numai valori întregi (de exemplu, numărul de promovați dintr-o clasă) se numesc *discrete* sau *discontinue.*

Caracteristicile cantitative care pot lua orice valoare dintr-un interval finit de numere reale se numesc *continue*, (de exemplu, greutatea unor discuri metalice de rază r și densitate d).

2. Grupări de date

Definiție. Să presupunem dată o populație $\mathcal{P}$ și o caracteristică cantitativă, sau o variabilă, f. Caracteristica f asociază fiecărui individ x din populație o valoare $f(x)$, determinată în general prin măsurători empirice.

Mulțimea $\{(x, f(x)), x \in P\}$ ordonată după valorile lui x se numește *repartiția empirică* a caracteristicii f pe populația $\mathcal{P}$ sau *serie statistică.*

Evident, dacă păstrăm f și schimbăm populația $\mathcal{P}$, repartiția empirică sau seria statistică se schimbă și ea.

Exemplu. Pe o populație de 100 de arzătoare de cuarț de 250 W pentru lămpi fluorescente, numerotate de la 1 la 100, s-a măsurat tensiunea în arc, în volți. Cîmpul de toleranță admis pentru tensiune este de 125—145 volți. Repartiția empirică a caracteristicii este dată în tabelul 1.

Definiție. Pentru numărul real a, numărul indivizilor din mulțimea $\{x \mid x \in \mathcal{P}, f(x) = a\}$ se numește *frecvența absolută* a valorii a.

Dacă $f(\mathcal{P}) = \{f(x) \mid x \in \mathcal{P}\}$ este mulțimea valorilor caracteristicii f, atunci pentru orice $a \notin f(\mathcal{P})$ frecvența absolută este zero;
pentru orice $a \in f(\mathcal{P})$ frecvența absolută este diferită de zero.

Frecvența absolută a valorii a se notează în general prin n_a și $\sum_{a \in f(P)} n_a = N$, $N = \text{card } (\mathcal{P})$*).

Definiție. Dacă N este numărul unităților din populația $\mathcal{P}$ atunci $\frac{n_a}{N}$ se numește *frecvența relativă* a valorii a. Această frecvență se va nota cu f_a.

Suma tuturor frecvențelor relative este 1. Adesea frecvența relativă se dă în procente.

*) Card $\mathcal{P}$ înseamnă cardinalul mulțimii $\mathcal{P}$, adică numărul de elemente din mulțime.

Tabelul I

Nr. critic*)	Tensiunea	Nr. critic	Tensiunea	Nr. critic	Tensiunea	Nr. critic	Tensiunea	Nr. critic	Tensiunea
1	134	21	134	41	125	61	144	81	134
2	133	22	135	42	136	62	146	82	132
3	136	23	136	43	133	63	134	83	130
4	133	24	138	44	139	64	142	84	132
5	135	25	131	45	131	65	146	85	138
6	140	26	137	46	141	66	133	86	137
7	141	27	123	47	128	67	135	87	133
8	138	28	129	48	137	68	126	88	137
9	132	29	137	49	128	69	134	89	130
10	130	30	135	50	127	70	127	90	139
11	135	31	140	51	136	71	138	91	131
12	144	32	134	52	136	72	132	92	138
13	136	33	130	53	130	73	126	93	139
14	129	34	135	54	135	74	135	94	141
15	122	35	144	55	147	75	143	95	135
16	124	36	148	56	134	76	142	96	142
17	135	37	140	57	142	77	134	97	138
18	139	38	135	58	148	78	143	98	128
19	145	39	131	59	133	79	140	99	138
20	137	40	123	60	135	80	140	100	137

*) Nr. critic înseamnă numărul de ordine al arzătorului.

Definiție. Pentru numărul real a, numărul indivizilor din mulțimea $\{x|x\in\mathcal{P}, f(x) \leqslant a\}$ se numește *frecvența absolută cumulată crescătoare* a valorii a. Această frecvență se va nota cu $n_a\uparrow$.

Definiție. Pentru numărul real a, numărul indivizilor din mulțimea $\{x|x\in\mathcal{P}, f(x) \geqslant a\}$ se numește *frecvența absolută cumulată descrescătoare* a valorii a. Această frecvență se va nota cu $n_a\downarrow$.

În mod analog, schimbînd cuvîntul „absolut" cu „relativ" se definesc frecvențele relative cumulate crescătoare și descrescătoare. Acestea se vor nota respectiv cu $f_a\uparrow$ și $f_a\downarrow$. În cele ce urmează, pentru simplificarea exprimării, prin „frecvența — cumulată" se va înțelege „frecvență relativă cumulată crescătoare".

Se observă că urmărirea repartiției caracteristicii f pe tabelul 1 este destul de greoaie. Să ordonăm mulțimea valorilor $\{f(x), x\in\mathcal{P}\}$ și să considerăm aplicația prin care fiecărei valori $f(x) = a$ îi asociem frecvența n_a. Această aplicație se numește *gruparea datelor* sau *serie statistică grupată*, sau *repartiție*. Se obține tabelul 2.

Tabelul 2

Tensiunea	Nr. arzătoare	Tensiunea	Nr. arzătoare
122	1	135	12
123	2	136	6
124	1	137	7
125	1	138	7
126	2	139	4
127	2	140	5
128	3	141	3
129	2	142	4
130	5	143	2
131	4	144	3
132	4	145	1
133	6	146	2
134	8	147	1
		148	2
Total			100

Pe acest tabel se poate ușor observa că un număr mic de arzătoare se situează în afara cîmpului de toleranță, cuprins între limitele 125—145 volți; că tensiunea de 135 de volți se găsește în cel mai mare număr de arzătoare, că valorile din jurul acestei tensiuni se găsesc într-un număr mai mare de arzătoare, decît valorile mai depărtate de valoarea 135 V etc.

Tabelul 2 este format numai din două coloane de numere, prima corespunzînd valorilor caracteristicii și a doua corespunzînd numărului de indivizi ai populației care dau caracteristicii valoarea respectivă.

Pentru populația $\mathcal{P}$ și caracteristica f date, să considerăm în mulțimea $f(\mathcal{P}) = \{f(x),\ x \in \mathcal{P}\}$, $x_0 = \min f(\mathcal{P})$, $x_n = \max f(\mathcal{P})$ și o partiție $x_0 < x_1 < \ldots < x_n$ a intervalului $[x_0,\ x_n]$, unde $x_i \in f(\mathcal{P})$, $0 \leqslant i \leqslant n$.

Mulțimea $f(\mathcal{P}) \cap [x_i,\ x_{i+1}]$ se numește *clasa de valori*.

Observăm că în tabelul 2, lucrurile se simplifică și mai mult, aplicînd valorilor primei coloane o astfel de împărțire în clase. Lungimea fiecărei clase se alege după necesități, fie în exemplul dat, egală cu 3. Facem convenția ca limita superioară a clasei să nu aparțină clasei respective. Obținem tabelul 3.

Acest tabel ne arată că în numărul cel mai mare de arzătoare tensiunea în arc este cuprinsă între valorile 134—137 V. În practica statistică împărțirea în clase este indicată cînd numărul valorilor caracteristicii este mare și este absolut necesară în cazul caracteristicilor continue.

Definiție. Pentru intervalul $[a_i, a_{i+1})$, numărul indivizilor din mulțimea $\{x \mid x \in \mathcal{P},\ a_i \leqslant f(x) < a_{i+1}\}$ se numește *frecvența absolută* a intervalului $[a_i, a_{i+1})$ și se notează cu $n_{i,i+1}$.

Tabelul 3

Tensiunea	Nr. arză-toare
122—125	4
125—128	5
128—131	10
131—134	14
134—137	26
137—140	18
140—143	12
143—146	6
146—149	5
Total	100

Definiție. Numărul $\frac{n_{i,i+1}}{N}$ se numește frecvența relativă a intervalului $[a_i, a_{i+1})$ și se notează $f_{i,i+1}$.

Pentru intervalele $[a_i, a_{i+1})$ se pot de asemenea defini frecvențele absolute cumulate și relative cumulate în mod corespunzător definițiilor anterioare.

Exemple. În tabelul 2 avem:

$$n_{123} = 2;$$

$f_{135} = \frac{12}{100}$; sau $f_{135} = 12\,\%$

$n^{\uparrow}_{126} = 1 + 2 + 1 + 1 + 2 = 7;$

$n^{\downarrow}_{145} = 1 + 2 + 1 + 2 = 6;$

$f^{\uparrow}_{126} = 0{,}01 + 0{,}02 + 0{,}01 + 0{,}01 + 0{,}02 = 0{,}07$

$f^{\downarrow}_{145} = \frac{6}{100} = 0{,}06$

Pentru clasa 131—134 din tabelul 3 avem:

$n_{131,\,134} = 14;$

$f_{131,\,134} = \frac{14}{100};$

$n^{\uparrow}_{131,134} = 33$ (avem 33 arzătoare în care tensiunea în arc este strict mai mică decît 134 volți);

$n^{\downarrow}_{131,134} = 81$ (avem 81 de arzătoare în care tensiunea în arc este de cel puțin 131 volți);

$f^{\uparrow}_{131,134} = 0{,}04+0{,}05+0{,}10+0{,}14 = 0{,}33$ (în 33% din arzătoare se găsește o tensiune sub 134 volți).

$f^{\downarrow}_{131,134} = 0{,}81$ (în 81% din arzătoare tensiunea este de cel puțin 131 volți).

Gruparea datelor în cazul analizării unei populații după două caracteristici conduce la un tabel cu dublă intrare. Avem un astfel de exemplu în tabelul 4, care exprimă repartiția a 47 de elevi după notele obținute la tezele de matematică și fizică.

Tabelul 4

Note la fizică \ Note la matematică	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	Total
10	1	3	0	0	0	0	0	0	0	0	4
9	2	3	0	0	0	0	0	0	0	0	5
8	0	0	4	6	2	0	0	0	0	0	12
7	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1
6	0	0	0	0	8	7	0	0	0	0	15
5	0	0	0	0	0	0	5	0	0	1	6
4	0	0	0	0	0	0	0	4	0	0	4
3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
Total	3	6	5	6	10	7	5	4	0	1	47

Tabelul 4 reprezintă notele obținute la tezele de matematică și fizică dintr-o clasă de 47 de elevi.

Vedem aici că 6 elevi au obținut 7 la teza de matematică și 8 la teza de fizică, 5 elevi au obținut 4 la teza de matematică și 5 la teza de fizică, nici un elev n-a obținut 10 la matematică și 8 la fizică etc.

3. Reprezentarea grafică a seriilor statistice pentru o singură caracteristică.

Definiție. Graficul corespunzător unei serii statistice se numește *diagramă.*

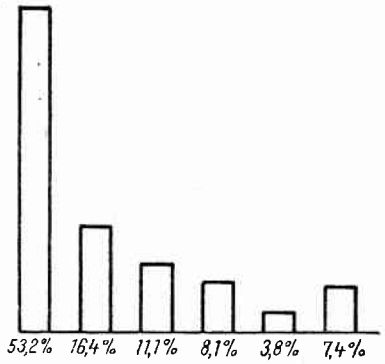
Exemplu. Construcția unei diagrame capătă diferite forme potrivit cu seria statistică, cu felul în care sînt date valorile caracteristicii studiate. Să se construiască diagrama corespunzătoare repartiției investițiilor din bugetul de stat pe ramuri, în anul 1969:

1. Industrie 53,2%
2. Agricultură 16,4%
3. Transporturi și telecomunicații..... 11,1%

4. Gospodăria comunală şi de locuinţe 8,1%
5. Învăţămînt, cultură, ştiinţă, sănătate..... 3,8%
6. Celelalte ramuri 7,4%

Aici populaţia statistică este formată din cele 6 capitole. Pentru obţinerea diagramei considerăm un sistem de axe rectangulare; pe axa absciselor

Fig. 9



vom lua 6 segmente egale între ele, care vor constitui bazele unor dreptunghiuri cu înălţimile proporţionale cu datele din tabelul investiţiilor pe ramuri. Se obţine fig. 9.

În cazul seriilor statistice cu o caracteristică cantitativă, se întîlnesc în mod curent următoarele reprezentări grafice: *reprezentarea în batoane, histograma, poligonul frecvenţelor.*

Reprezentarea în batoane se utilizează în cazul seriilor statistice în care caracteristica ia un număr mic de valori şi valorile nu sînt grupate în clase. Construcţia o dăm pe exemplul următor.

Exemplu. Să se reprezinte distribuţia a 100 de şuruburi după valorile diametrului. Datele de observaţii sînt trecute în tabelul 5.

Tabelul 5

Diametrul în mm	Nr. de şuruburi n_a	Diametrul în mm	Nr. de şuruburi n_a
8,37	1	8,43	16
8,38	4	8,44	13
8,39	7	8,45	7
8,40	11	8,46	4
8,41	15	8,47	1
8,42	20	8,48	1

Se ia un sistem de axe rectangulare și o unitate de măsură potrivită pe fiecare din axe. Pe axa absciselor se trec punctele corespunzătoare valorilor caracteristicii, iar din aceste puncte se ridică segmente verticale de lungime egală cu frecvența absolută sau relativă corespunzătoare. Se obține figura 10.

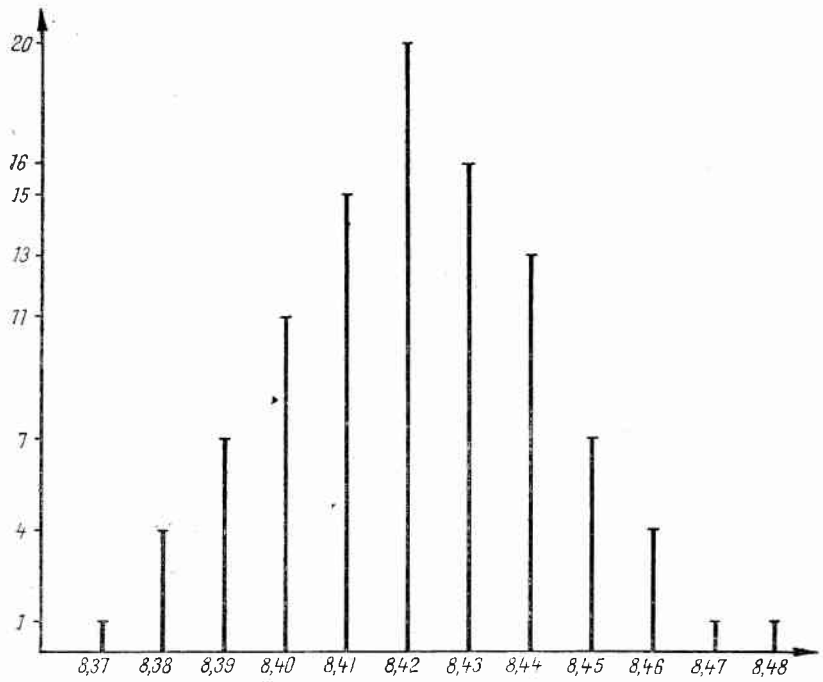


Fig. 10

Histograma se utilizează atunci cînd valorile caracteristicii apar grupate în clase și are următoarea construcție: să considerăm tabelul 3; pe axa absciselor se iau segmente egale între ele, în general egale cu amplitudinea claselor și pe acestea, considerate ca baze, se ridică dreptunghiuri de înălțimi proporționale cu frecvența absolută sau relativă a claselor. Se obține figura 11.

Poligonul frecvențelor se utilizează tot în cazul grupării datelor pe clase și se construiește astfel:

Exemplu. Să luăm din nou tabelul 3. În mijlocul fiecărui segment de pe abscisă (trasat ca și pentru histogramă) se ridică segmente verticale proporționale cu frecvențele absolute sau relative ale claselor corespunzătoare. Extremitățile acestor segmente se unesc printr-o linie poligonală. Se obține figura 12.

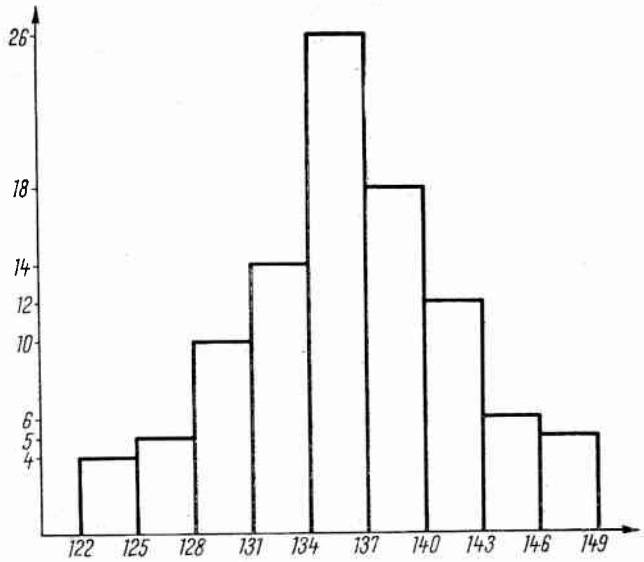

26
18
14
12
10
6
5
4
122
125
128
131
134
137
140
143
146
149

Fig. 11

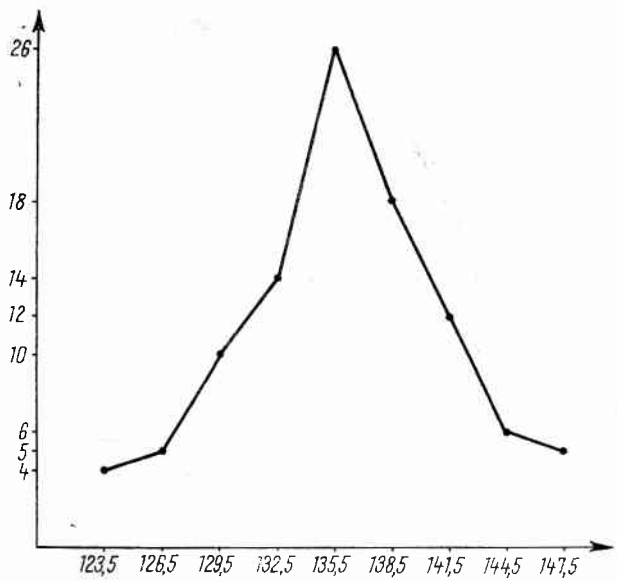

26
18
14
12
10
6
5
4
123,5
126,5
129,5
132,5
135,5
138,5
141,5
144,5
147,5

Fig. 12

Poligonul frecvențelor cumulate se obține unind printr-o linie poligonală punctele de coordonate (x,y) unde x este extremitatea dreaptă a unei clase și y frecvența cumulată a clasei respective, la care se adaugă punctul de coordonate $(0, a)$ unde a este extremitatea stîngă a primei clase. Pentru tabelul 3 se obține figura 13.

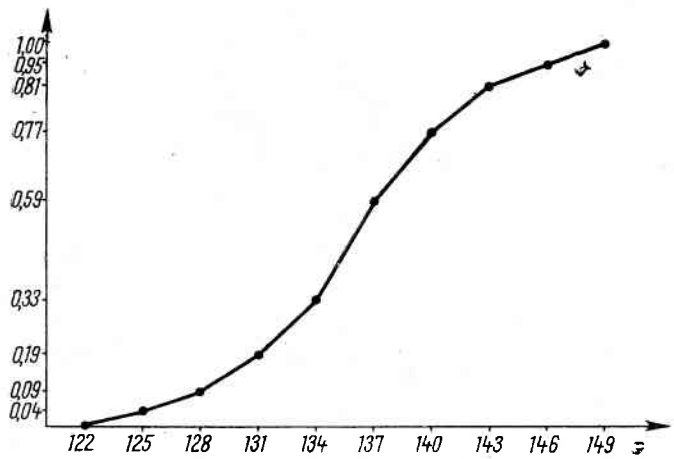


Fig. 13

4. Valori caracteristice ale unei serii statice

a) *Valoarea centrală a unei clase*

Definiție. Se numește *valoarea centrală* a unei clase $f(\mathcal{P}) \cap [x_i, x_{i+1})$ media aritmetică a extremităților acestei clase.

Exemplu. Să considerăm tabelul 3. Valoarea centrală a clasei 128—131 este 129,5.

b) *Media aritmetică*

Definiție. Fiind dată repartiția statistică a unei caracteristici f (variabile);

$$\begin{pmatrix} x_1 & n_1 \\ x_2 & n_2 \\ \vdots & \\ x_N & n_N \end{pmatrix},$$

media aritmetică a variabilei f este

$$\bar{x} = \frac{x_1 n_1 + x_2 n_2 + \ldots + x_N n_N}{n_1 + n_2 + \ldots + n_N} = \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i n_i}{N},$$

sau

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^{N} x_i f_i.$$

În cazul cînd valorile variabilei sînt grupate în clase, calculul mediei se dă cu ajutorul valorilor centrale ale claselor și anume:

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^{N} \frac{x_i + x_{i+1}}{2} f_i.$$

În practică pentru media aritmetică se pot folosi unele artificii de calcul care sistematizează sau scurtează calculele.

Să punem

$$x_i = x_0 + (x_i - x_0), \quad 1 \leqslant i \leqslant N$$

și să înmulțim această relație cu n_i

$$x_i n_i = x_0 n_i + (x_i - x_0) n_i, \quad 1 \leqslant i \leqslant N$$

Adunînd aceste relații membru cu membru și împărțind la N obținem:

$$\bar{x} = x_0 + \sum_{i=1}^{N} (x_i - x_0) f_i$$

Calculul mediei aritmetice cu această formulă se numește metoda zeroului fals și poate conduce la simplificarea calculelor printr-o alegere potrivită a valorii x_0.

Exemple

Să completăm tabelul 3 după cum urmează, alegînd $x_0 = 135{,}5$

Tabelul 6

Clase	Frecvența absolută n_i	Valori centrale x_i	$x_i - x_0$	f_i	$f_i(x_i - x_0)$	$x_i f_i$
122—125	4	123,5	—12	0,04	—0,48	4,940
125—128	5	126,5	— 9	0,05	—0,45	6,325
128—131	10	129,5	— 6	0,1	—0,6	12,950
131—134	14	132,5	— 3	0,14	—0,42	18,550
134—137	26	135,5	0	0,26	0	35,230
137—140	18	138,5	3	0,18	0,54	24,930
140—143	12	141,5	6	0,12	0,72	16,980
143—146	6	144,5	9	0,06	0,54	8,670
146—149	5	147,5	12	0,05	0,60	7,375
Total	100				+ 0,45	135,950

Calculînd media după definiție obținem, însumînd termenii ultimei coloane:

$$\bar{x} = 135{,}95$$

Utilizînd metoda zeroului fals și alegînd $x_0 = 135{,}5$ calculele se simplifică. Însumînd termenii penultimei coloane obținem:

$$\sum_i f_i(x_i - x_0) = 0{,}45.$$

Urmează că

$$\bar{x} = 135{,}5 + 0{,}45 = 135{,}95$$

c) *Dispersia*

Definiție. Se numește dispersie a repartiției $\begin{pmatrix} x_1 & n_1 \\ x_2 & n_2 \\ \dots & \dots \\ x_N & n_N \end{pmatrix}$,

care are media $\bar{x}$, mărimea

$$\sigma^2 = \frac{(x_1 - \bar{x})^2 n_1 + (x_2 - \bar{x})^2 n_2 + \ldots + (x_N - \bar{x})^2 n_N}{N}$$

sau

$$\sigma^2 = \sum_{i=1}^{N} (x_i - \bar{x})^2 f_i$$

Mărimea $\sigma = \sqrt{\sigma^2}$ se numește *abaterea medie pătratică*. Această mărime ca și σ^2 caracterizează împrăștierea valorilor în jurul valorii medii; cu cît este mai mică abaterea medie pătratică, cu atît valorile seriei statistice se grupează mai mult în jurul valorii medii.

Se poate da și altă formulă pentru calculul dispersiei.

Dezvoltînd pătratele din expresia σ^2 obținem

$$\sigma^2 = \frac{1}{N} [x_1^2 n_1 + x_2^2 n_2 + \ldots + x_N^2 n_N - 2\bar{x}(x_1 n_1 + x_2 n_2 + \ldots + x_N n_N) +$$

$$+ \bar{x}^2(n_1 + n_2 + \ldots + n_N)] = \frac{x_1^2 n_1 + x_2^2 n_2 + \ldots + x_N^2 n_N}{N} - 2\bar{x}^2 + \bar{x}^2$$

De unde

$$\sigma^2 = \overline{(x^2)} - (\bar{x})^2$$

Trecînd, ca în cazul mediei, la alegerea unui x_0 potrivit, calculul dispersiei se simplifică prin formula

$$\sigma^2 = \frac{(x_1 - x_0)^2 n_1 + (x_2 - x_0)^2 n_2 + \ldots + (x_N - x_0)^2 n_N}{N} - (\bar{x} - x_0)^2,$$

sau ceea ce este același lucru

$$\sigma^2 = \sum_{i=1}^{N} (x_i - x_0)^2 f_i - (\bar{x} - x_0)^2.$$

Demonstrație. Se pune x_i sub forma:

$$x_i = x_0 + (x_i - x_0).$$

De aici

$$x_i - \bar{x} = (x_i - x_0) - (\bar{x} - x_0)$$

și

$$(x_i - \bar{x})^2 = (x_i - x_0)^2 - 2(x_i - x_0)(\bar{x} - x_0) + (\bar{x} - x_0)^2.$$

Înmulțind cu frecvențele absolute, făcînd suma după i și împărțind la N obținem

$$\frac{\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})^2 n_i}{N} = \frac{\sum_{i=1}^{N}(x_i - x_0)^2 n_i}{N} - 2(\bar{x} - x_0)\frac{\sum_{i=1}^{N}(x_i - x_0) n_i}{N} + (\bar{x} - x_0)^2$$

Dar

$$\frac{\sum_{i=1}^{N}(x_i - x_0)\, n_i}{N} = \overline{x_i - x_0} = \bar{x} - x_0.$$

Prin urmare

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{N}(x_i - x_0)^2 n_i}{N} - 2(\bar{x} - x_0)^2 + (\bar{x} - x_0)^2,$$

și deci

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{N}(x_i - x_0)^2\, n_i}{N} - (\bar{x} - x_0)^2.$$

Exemple. Să calculăm prin ambele formule dispersia distribuției a 100 de șuruburi după valorile diametrului așa cum este dată în tabelul 7. Se alege $x_0 = 8{,}41$.

Tabelul 7

x_i	n_i	f_i	$x_i - x_0$	$f_i(x_i - x_0)$	$x_i - \bar{x}$	$(x_i - \bar{x})^2$	$(x_i - \bar{x})^2 f_i$	$(x_i - x_0)^2$	$(x_i - x_0)^2 f_i$
8,37	5	0,05	−0,04	−0,0020	−0,045	0,0020	0,00010	0,0016	0,00008
8,39	18	0,18	−0,02	−0,0036	−0,025	0,0006	0,00010	0,0004	0,00007
8,41	35	0,35	0	0	−0,005	0	0	0	0
8,43	29	0,29	0,02	0,0058	0,015	0,0002	0,00005	0,0004	0,00011
8,45	11	0,11	0,04	0,0044	0,035	0,0012	0,00013	0,0016	0,00017
8,47	2	0,02	0,06	0,0012	0,055	0,0030	0,00006	0,0036	0,00007
Total	100			0,0058			0,00044		0,00050

$$\bar{x} = 8{,}41 + 0{,}0058 = 8{,}4158$$

$$\sigma^2 = \sum_i f_i(x_i - \bar{x})^2 \simeq 0{,}00044$$

$$\sigma^2 = \sum_i f_i(x_i - x_0)^2 - (\bar{x} - x_0)^2 \simeq 0{,}00044$$

Pentru seriile statistice grupate pe intervale se procedează ca și în cazul mediei aritmetice; x_i reprezintă atunci valoarea centrală a clasei a i-a.

d) *Modul*

Definiție. Se numește *modul* sau *moda* unei serii statistice valoarea caracteristicii căreia îi corespunde cea mai mare frecvență.

În cazul grupării valorilor caracteristice în clase, modul este valoarea centrală a clasei căreia îi corespunde cea mai mare frecvență.

Exemple. În tabelul 2, modul este $M = 135$; în tabelul 6 modul este $M = 135{,}5$.

Există serii statistice fără mod, unde nici o valoare nu are frecvență maximă.

Exemplu. Un șir de valori 3, 4, 7, 8, 9, 10, 11, 13 nu are mod; fiecare valoare are frecvența 1. Există serii statistice cu mai multe mode: bimodale, trimodale etc. (Bimodale: două valori distincte ale caracteristicii au aceeași frecvență maximă etc.).

e) *Mediana*

Definiție. Se numește *mediana* unei serii statistice valoarea caracteristicii care împarte volumul populației în două părți egale.

Exemplu. În tabelul 2, mediana este Me = 135 deoarece există 13 valori ale caracteristicii < 135 și 13 valori ale caracteristicii > 135.

Dacă avem un număr par de valori ale caracteristicii:

$$2, 3, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 9$$

mediana este media aritmetică a numerelor de la mijloc $\frac{5+6}{2} = 5{,}5$. La fel mediana poate fi considerată unul din numerele 5 și 6.

Să urmărim pe un exemplu, calculul medianei în cazul valorilor caracteristicii grupate în clase.

Exemplu. Să considerăm tabelul 3. Se presupune că arzătoarele ar fi aranjate în ordinea tensiunilor în arc respective; atunci ne interesează tensiunea în arc din al 50-lea arzător. Tensiunea din al 50-lea arzător se găsește în clasa 134—137. Acestei clase îi corespund 26 de arzătoare; pentru fiecare din ele variația este $\frac{137-134}{26}$. Ca să aflăm al cîtelea element al clasei 134—137 este arzătorul care ne interesează trebuie să scădem din 50 numărul 33 căci există $4 + 5 + 10 + 14 = 33$ arzătoare în care tensiunea este mai mică decît 134 V. Arzătorul considerat este deci al 17-lea element al clasei de variație 134 — 137.

Astfel mediana se găsește după formula:

$$\text{Me} = 134 + (50 - 33)\frac{137-134}{26} = 135{,}7.$$

Adesea, mediana se determină din poligonul frecvențelor cumulate după schema indicată în graficul din fig. 14.

5. Ajustarea liniară a distribuțiilor experimentale

Datele statistice de observație asupra diferitelor caracteristici definite pe anumite populații constituie distribuțiile experimentale sau empirice. Problema care stă adesea în fața statisticienilor este deducerea unor distri-

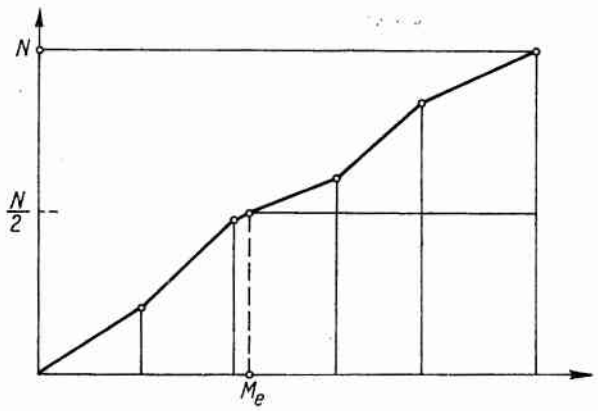


Fig. 14

buții teoretice, pentru fenomenul respectiv, din distribuția empirică cunoscută. Această problemă poartă numele de ajustarea distribuției empirice.

Observație. Uneori graficul unei serii statistice poate sugera forma unei distribuții teoretice. De exemplu, o histogramă în formă de clopot ne îndreaptă atenția asupra distribuției teoretice normale.

Ajustarea liniară. Vom considera cazul cînd punctele corespunzătoare unei serii experimentale $\{(x, f(x));\ x \in \mathcal{P}\}$ sînt dispuse aproximativ după o dreaptă. Problema ajustării liniare constă în determinarea dreptei care aproximează cel mai bine această distribuție empirică. Vom considera două metode pentru determinarea dreptei de ajustare.

a) *Metoda mediilor discontinue*

Să considerăm următorul tabel care ilustrează creșterea producției globale a industriei poligrafice din țara noastră în perioada 1955—1960:

Tabelul 8

Anii x_i	Producția globală y_i
1955	210
1956	241
1957	275
1958	303
1959	324
1960	351

Să atribuim valorii x_i abscisa i. Obținem punctele de coordonate $A_1 = (1; 2{,}10)$, $A_2(2; 2{,}41)$, $A_3 = (3; 2{,}75)$, $A_4 = (4; 3{,}03)$, $A_5 = (5; 3{,}24)$, $A_6 = (6; 3{,}51)$.

Pentru determinarea dreptei, considerăm întîi centrul de greutate al primelor trei puncte care este punctul $P_1(2; 2{,}42)$ și apoi centrul de greutate al ultimelor trei puncte care este punctul $P_2(5; 3{,}26)$. Dreapta căutată este dreapta care trece prin P_1 și P_2

$$y = 0{,}28x + 1{,}86.$$

b) Metoda celor mai mici pătrate

Să considerăm populația $\mathcal{P}$, caracteristica f, punctele $A_i(x_i, y_i)$ din plan unde $y_i = f(x_i)$ și dreapta $(D) y = ax + b$.

Să punem

$$e_i = y_i - (ax_i + b)$$

unde a și b sînt parametrii reali, iar e_i reprezintă diferența dintre ordonata punctului A_i și ordonata punctului de abscisă x_i de pe dreapta (D). Metoda constă în determinarea parametrilor a și b astfel ca suma pătratelor acestei diferențe să fie minimă.

Astfel

$$S = \sum_{i=1}^{N} e_i^2 = \sum_{i=1}^{N} [y_i - (ax_i + b)]^2 = \sum_{i=1}^{N} y_i^2 - 2\sum_{i=1}^{N} y_i(ax_i + b) + \sum_{i=1}^{N} (ax_i +$$

$$+ b)^2 = \sum_{i=1}^{N} y_i^2 - 2a\sum_{i=1}^{N} x_i y_i - 2b\sum_{i=1}^{N} y_i + a^2\sum_{i=1}^{N} x_i^2 + 2ab\sum_{i=1}^{N} x_i + Nb^2.$$

Astfel S se poate scrie ca un polinom de gradul II în a și b:

$$S = \left(\sum_{i=1}^{N} x_i\right) a^2 + 2\left(\sum_{i=1}^{N} x_i\right) ab + Nb^2 - 2\left(\sum_{i=1}^{N} x_i y_i\right) a - 2\left(\sum_{i=1}^{N} y_i\right) b + \sum_{i=1}^{N} y_i^2.$$

Pentru a găsi valorile lui a și b pentru care S să fie minimă, să observăm că polinomul de grad II în a și b

$$P(a; b) = Aa^2 + 2Bab + Cb^2 + 2Da + 2Eb + F$$

se mai poate scrie astfel:

$$P(a; b) = \frac{1}{C}(Ba + Cb + E)^2 + \frac{1}{C}[(AC - B^2)a^2 + 2(CD - BE)a +$$

$$+ (CF - E^2)],$$

sau

$$P(a; b) = \frac{1}{C}(Ba + Cb + E)^2 + \frac{1}{C(AC - B^2)}[(AC - B^2)a + (CD - BE)]^2 +$$

$$+ \frac{1}{C}(F - E^2) - \frac{(CD - BE)^2}{C(AC - B)^2}$$

Prin urmare $P(a;b)$ apare ca o sumă de pătrate plus o constantă dacă $C > 0$ și $AC - B^2 > 0$. Polinomul $P(a;b)$ este minim dacă fiecare din cele două pătrate este zero.

$$Ba + Cb + E = 0$$

și

$$(AC - B^2)a + CD - BE = 0.$$

Din ecuația a doua avem:

$$a = \frac{BE - CD}{AC - B^2}$$

și din ecuația primă:

$$b = \frac{B(CD - BE) - E(AC - B^2)}{C(AC - B^2)}.$$

Acum să observăm că S se obține din $P(a;\ b)$ punînd $A = \sum_{i=1}^{N} x_i^2$,

$$B = \sum_{i=1}^{N} x_i,\ C = N,\ D = -\sum_{i=1}^{N} x_i y_i,\ E = -\sum_{i=1}^{N} y_i,\ F = \sum_{i=1}^{N} y_i^2.$$

Se vede că $C = N > 0$ și inegalitatea $AC - B^2 = N\sum_{i=1}^{N} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{N} x_i\right)^2 \geqslant 0$ este adevărată.

Prin urmare, S este minim cînd

$$a = \frac{N\sum_{i=1}^{N} x_i y_i - \sum_{i=1}^{N} x_i \sum_{i=1}^{N} y_i}{N\sum_{i=1}^{N} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{N} x_i\right)^2}, \quad a\sum_{i=1}^{N} x_i + Nb - \sum_{i=1}^{N} y_i = 0.$$

Notînd

$$\sum_{i=1}^{N} x_i = N\bar{x}\ \sum_{i=1}^{N} y_i = N\bar{y},$$

avem

$$a = \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i y_i - N\bar{x}\bar{y}}{\sum_{i=1}^{N} x_i^2 - N\bar{x}^2}, \quad a\bar{x} + b = \bar{y}$$

Din această ultimă relație se vede că punctul $(\bar{x}, \bar{y})$ se găsește pe dreapta (D).

Pentru exemplul nostru din tabelul 8 avem:

$$x = \frac{21}{6} = 3{,}5\,,$$

$$y = \frac{17{,}04}{6} = 2{,}84\,,$$

$$N = 6$$

$$a = \frac{64{,}55 - 59{,}64}{91 - 73{,}50} = \frac{4{,}91}{17{,}50} = 0{,}28\,,$$

$$b = \bar{y} - a\bar{x} = 2{,}84 - 0{,}28 \cdot 3{,}5$$
$$= 2{,}84 - 0{,}98$$
$$= 1{,}86.$$

Prin urmare regăsim dreapta de ajustare

$$y = 0{,}28x + 1{,}86.$$

Cu aceste date se obține figura 15.

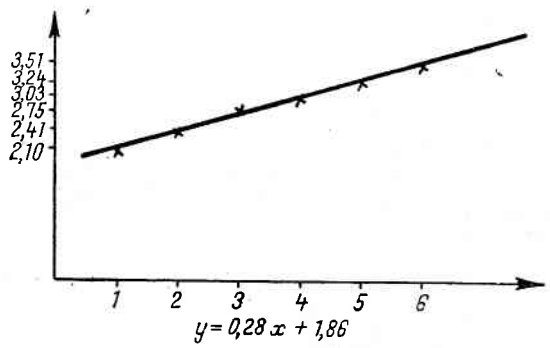


Fig. 15

§ 2. Exerciții și probleme rezolvate

1. *Dintr-un lot de* 10 000 *sticle de ulei* de 1/2 l *s-a măsurat conținutul la* 100 *de sticle luate la întîmplare și s-au obținut datele din tabelul* 9.

Tabelul 9

507,0	499,5	500,0	501,0	500,0
510,0	498,0	500,5	505,0	498,0
510,0	498,5	499,0	503,5	497,0
496,0	502,5	502,5	492,5	501,0
498,5	499,0	500,0	493,0	500,0
492,5	492,0	497,5	499,5	496,5
500,5	498,5	499,5	500,5	501,0
498,0	504,5	503,0	497,0	499,5
498,5	507,0	498,0	502,0	499,0
499,0	504,0	499,0	500,0	500,0
501,0	497,5	500,0	500,0	496,0
500,0	500,0	501,5	500,5	495,5
501,5	498,5	499,5	499,0	500,0
500,0	499,5	506,0	494,5	501,5
499,5	500,5	505,5	497,0	500,0
503,5	494,0	500,0	506,0	497,5
500,0	493,5	493,5	502,5	503,5
502,0	499,0	496,0	498,0	501,0
494,0	498,0	499,5	498,5	498,0
499,0	504,0	495,5	501,0	499,5

Să se facă gruparea datelor.

(Fabrica de ulei și produse derivate „Unirea" Iași.)

Rezolvare. Nivelul minim al caracteristicii este 492, iar cel maxim 510, deci:

x_i		n_i	x_i		n_i
492	I	1	500	~~HH~~ ~~HH~~ ~~HH~~	15
492,5	II	2	500,5	~~HH~~	5
493	I	1	501	~~HH~~ I	6
493,5	II	2	501,5	III	3
494	II	2	502	II	2
494,5	I	1	502,5	III	3
495,5	II	2	503	I	1
496	III	3	503,5	III	3
496,5	I	1	504	II	2
497	III	3	504,5	I	1
497,5	III	3	505	I	1
498	~~HH~~ II	7	505,5	I	1
498,5	~~HH~~ I	6	506	II	2
499	~~HH~~ III	8	507	II	2
499,5	~~HH~~ IIII	9	510	II	2

2. *Investițiile pe ramurile economiei naționale în jud. Iași în anul* 1969, *sînt date în tabelul* 10.

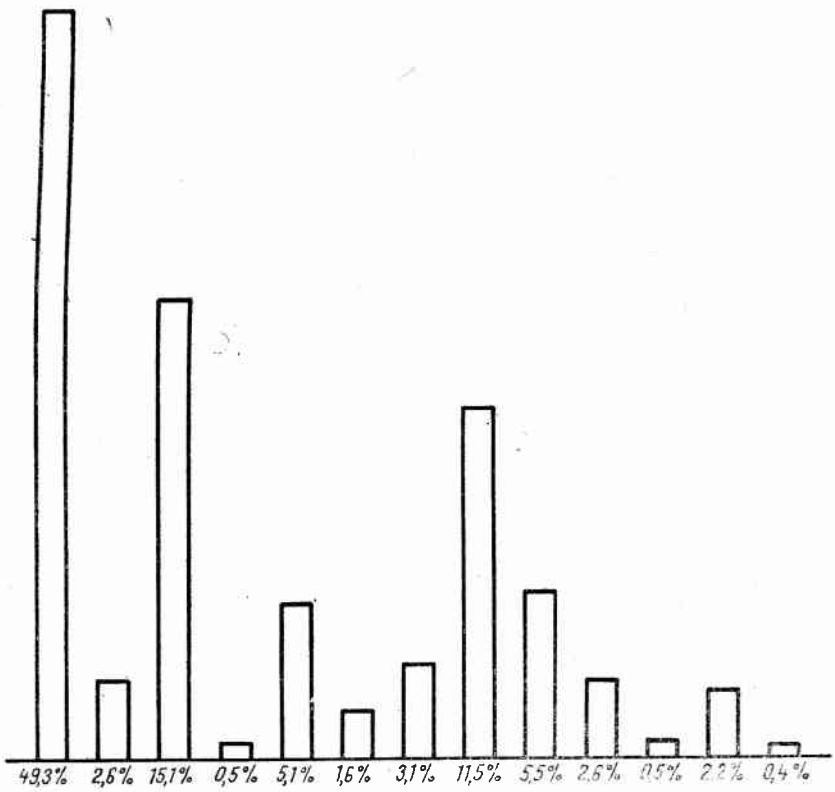
Să se reprezinte prin dreptunghiuri, diagrama corespunzătoare.

(Direcția județeană de statistică Iași.)

Rezolvare. Se obține figura 16.

Tabelul 10

Ramuri	milioane lei	%
Industrie	709	49,3
Construcții	37	2,6
Agricultură	218	15,1
Silvicultură	7	0,5
Transporturi	73	5,1
Telecomunicații	23	1,6
Circulația mărfurilor	44	3,1
Gospodăria comunală	166	11,5
Învățămînt	79	5,5
Cultură și artă	37	2,6
Știință și deservire științifică	7	0,5
Ocrotirea sănătății	32	2,2
Alte ramuri	6	0,4
Total județ	1438	100



* Lungimea primei coloane (din stînga) a fost redusă la jumătate.

Fig. 16

Se observă că ponderea investițiilor este în industrie, agricultură și gospodăria comunală (unde intră și construcția de locuințe).

3. *Populația pe grupe de vîrstă și sexe la* 1 *iulie* 1970, *din Județul Iași, este dată în tabelul* 11.

Tabelul 11

Grupe de vîrstă	Populația		Masculin		Feminin		% din populație	
	număr	%	număr	%	număr	%	masculin	feminin
Total	677357	100	333572	100	343965	100	49,2	50,8
0—5	82295	12,1	42107	12,6	40488	11,8	51,2	48,8
5—10	59248	8,7	30109	9,0	29139	8,5	50,8	49,2
10—15	72158	10,7	36773	11,0	35385	10,3	50,9	49,1
15—20	68726	10,1	34920	10,5	33806	9,8	50,8	49,2
20—25	55334	8,2	27867	8,4	27467	8,0	50,4	49,6
25—30	43756	6,5	21788	6,5	21968	6,4	49,8	50,2
30—35	51921	7,7	26262	7,9	25659	7,5	50,6	49,4
35—40	48623	7,2	24210	7,3	24413	7,0	49,8	50,2
40—45	44417	6,6	21684	6,5	22733	6,6	48,8	51,2
45—50	36100	5,3	16904	5,0	19205	5,6	46,8	53,2
50—55	20000	3,0	8576	2,6	11424	3,3	42,9	57,1
55—60	27135	4,0	12029	3,6	15106	4,4	44,3	55,6
60—65	23771	3,5	10997	3,3	12774	3,7	46,3	53,7
65—70	19243	2,8	8872	2,7	10371	3,0	46,1	53,9
70—75	12808	1,9	5698	1,7	7110	2,1	44,5	55,5
75 și peste	11693	1,7	4776	1,4	6917	2,0	40,5	59,5

Se cere:

a) Histograma pentru fiecare serie în parte (populație, masculin, feminin).

b) Să se reprezinte pe același grafic poligoanele frecvențelor pentru masculin și feminin, folosind însă procentele din totalul populației din grupa de vîrstă respectivă.

c) *Să se interpreteze rezultatele obținute.*

(Direcția județeană de statistică Iași.)

Rezolvare. a) Se obțin corespunzător histogramele din figurile 17—19.

b) Se obține figura 20.

c) Se observă că în toate cazurile cea mai numeroasă grupă de vîrstă este de la 0—4 ani; sînt mai mulți indivizi de sex masculin decît feminin pînă la grupa de vîrstă 25 — 29 de ani, iar după grupa de vîrstă 35—39 de ani situația se inversează.

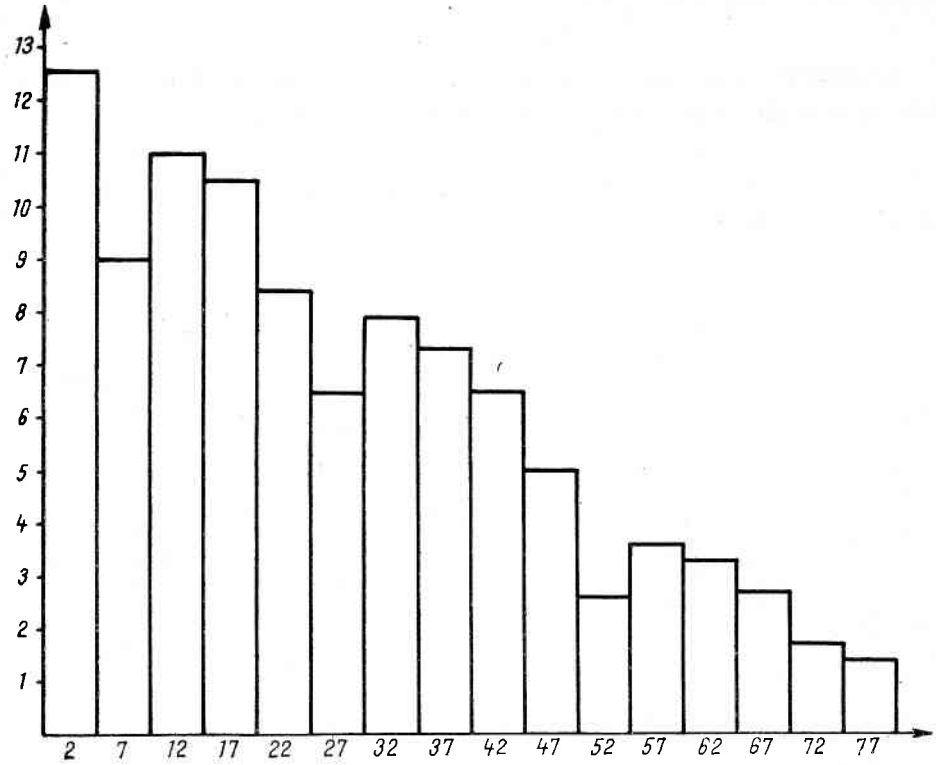

13
12
11
10
9
8
7
6
5
4
3
2
1
2 7 12 17 22 27 32 37 42 47 52 57 62 67 72 77

Fig. 17

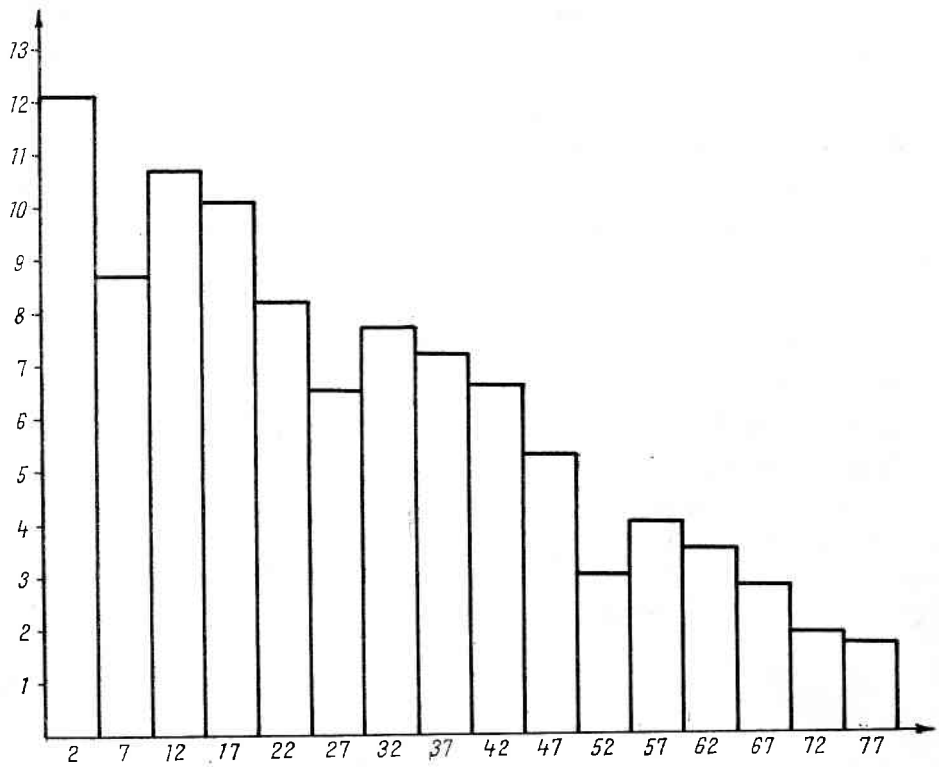

13
12
11
10
9
8
7
6
5
4
3
2
1
2 7 12 17 22 27 32 37 42 47 52 57 62 67 72 77

Fig. 18

4. *Situația la* 1 *iulie* 1970, *pe grupe de vîrstă și pe sexe la copiii între* 6—10 *ani din județul* Iași *este dată în tabelul* 12.

Tabelul 12

Vîrsta în ani	copii		băieți		fete		% din număr copii	
	număr	%	număr	%	număr	%	băieți	fete
6	11410	18,6	5831	18,7	5579	18,5	50,8	49,2
7	11639	19,0	5906	18,9	5733	19,0	51,1	48,9
8	12024	19,6	6074	19,5	5950	19,7	50,8	49,2
9	12736	20,7	6472	20,7	6264	20,8	50,3	49,7
10	13543	22,1	6921	22,5	6622	22,0	50,8	49,2
total	61352	100	31204	100	30148	100	51,1	48,9

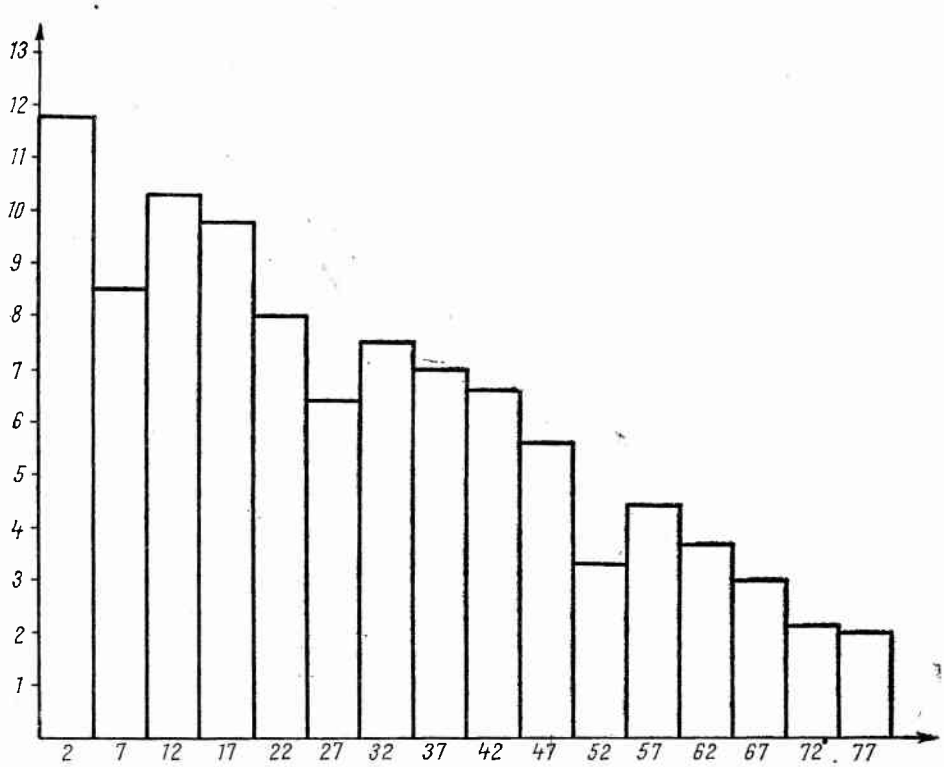


Fig. 19

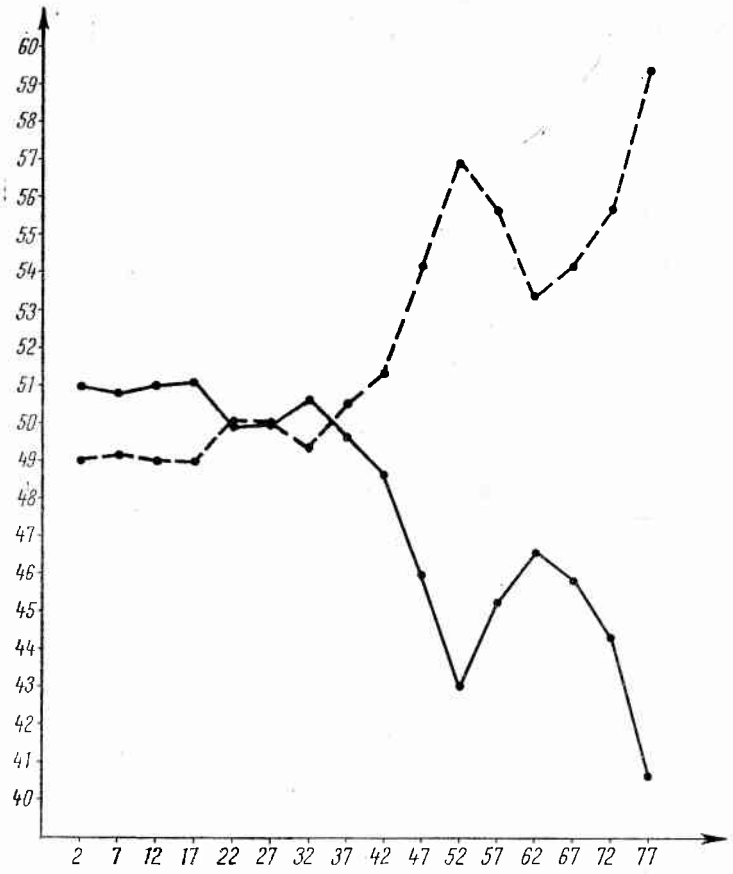


Fig. 20

Se cere:

a) *Modul pentru fiecare serie în parte.*

b) *Să se reprezinte poligonul frecvențelor pentru fiecare serie.*

c) *Să se reprezinte pe un același grafic poligonul frecvențelor pentru băieți și fete în procente din numărul copiilor de aceeași vîrstă și să se interpreteze rezultatul obținut.*

(Direcția județeană de statistică Iași.)

Rezolvare. a) Pentru cele trei serii modul este același și anume egal cu 10 (vîrsta corespunzătoare procentului celui mai mare de copii, băieți și fete).

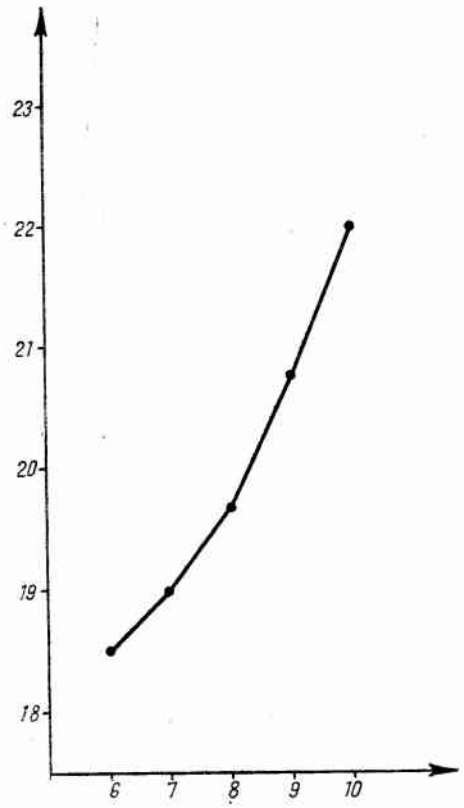


Fig. 21

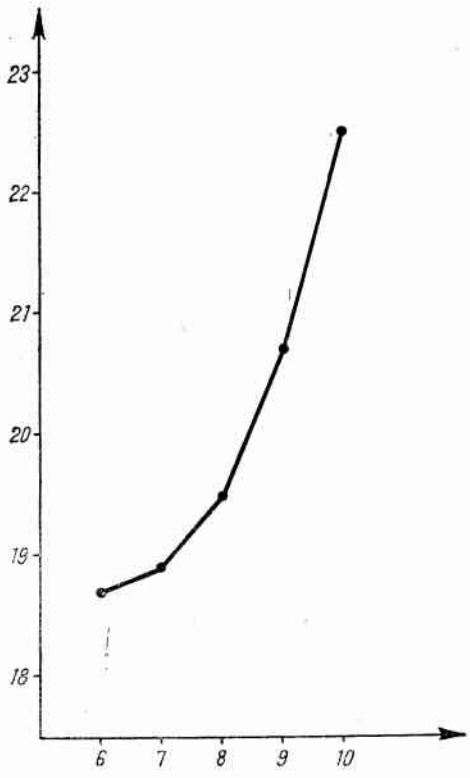


Fig. 22

b) Pentru seria de copii poligonul frecvențelor este dat în figura 21, iar pentru seria de băieți și seria de fete poligoanele frecvențelor sînt date în figura 22, corespunzător figura 23.

c) Se obține graficul din figura 24. Se constată că pentru fiecare grupă de vîrstă procentul de băieți din numărul total al copiilor este mai mare decît procentul de fete, diferența maximă fiind la vîrsta de 7 ani, iar cea minimă la 9 ani.

5. *S-a analizat conținutul de baze volatile la* 12 *loturi de caprolactamă**) *cristalizată, tip A. Rezultatele obținute date în miliechivalenți pe kg sînt cuprinse în tabelul* 13.

---

*) Produs intermediar utilizat în producerea relonului, precum și în alte sinteze în industria chimică și farmaceutică.

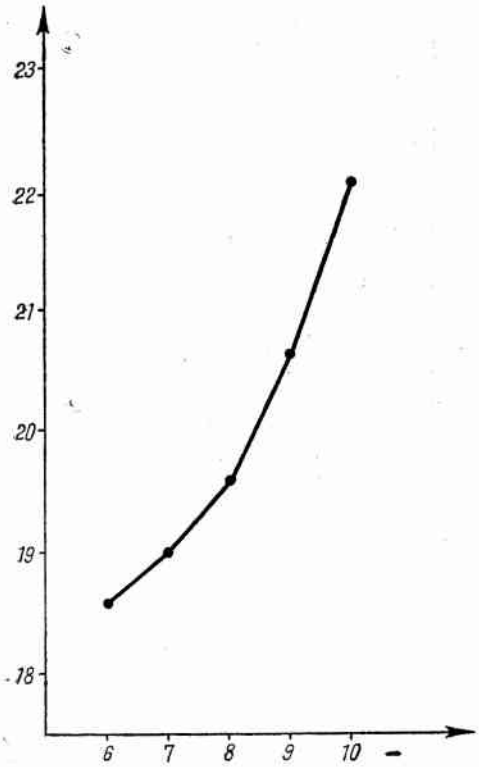


Fig. 23

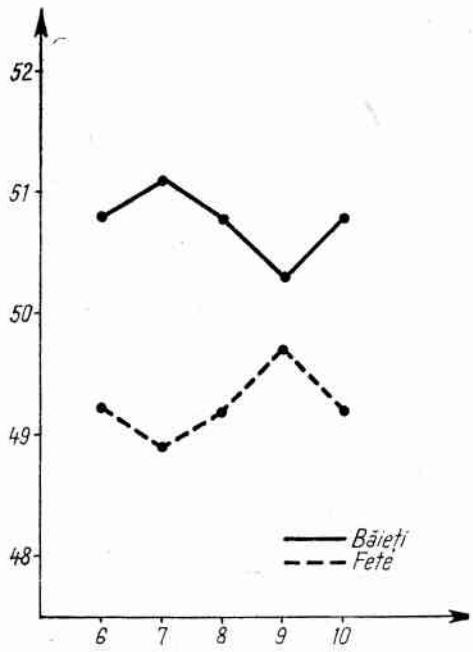


Fig. 24

Tabelul 13

Nr. crt. ot	Baze volatile	Nr. crt. lot	Baze volatile
1	0,10	7	0,30
2	0,25	8	0,20
3	0,20	9	0,20
4	0,20	10	0,35
5	0,35	11	0,10
6	0,25	12	0,15

Se cere:

a) *Să se facă gruparea datelor.*

b) *Să se completeze tabela obținută la punctul a) cu frecvențe relative, frecvențe absolute cumulate crescătoare și descrescătoare și frecvențe relative cumulate crescătoare și descrescătoare.*

c) *Modul, media, dispersia și abaterea medie pătratică.*

d) *Poligonul frecvențelor, folosind frecvențele absolute.*

e) *Să se interpreteze rezultatele obținute știind că conținutul de baze volatile indică impuritatea produsului și că limita maximă admisă prin STAS-ul* 7311/69 *este egală cu* 0,4.

(Uzina de fibre sintetice Săvinești).

Rezolvare. a) Nivelul minim al caracteristicii este 0,10 iar cel maxim 0,35, deci:

0,10 ||
0,15 |
0,20 ||||
0,25 ||
0,30 |
0,35 ||

prin urmare se obține tabelul 14

Tabelul 14

x_i	n_i
0,10	2
0,15	1
0,20	4
0,25	2
0,30	1
0,35	2

b) Se obține tabelul 15.

Tabelul 15

x_i	n_i	f_i	$n_i \uparrow$	$n_i \downarrow$	$f_i \uparrow$	$f_i \downarrow$
0,10	2	0,17	2	12	0,17	1
0,15	1	0,08	3	10	0,25	0,83
0,20	4	0,33	7	9	0,58	0,75
0,25	2	0,17	9	5	0,75	0,42
0,30	1	0,08	10	3	0,83	0,25
0,35	2	0,17	12	2	1	0,17

c) $M = 0{,}20$; $\bar{x} = 0{,}22$; $\sigma^2 = 0{,}006$; $\sigma = 0{,}08$.

d) Pentru poligonul frecvențelor se obține figura 25.

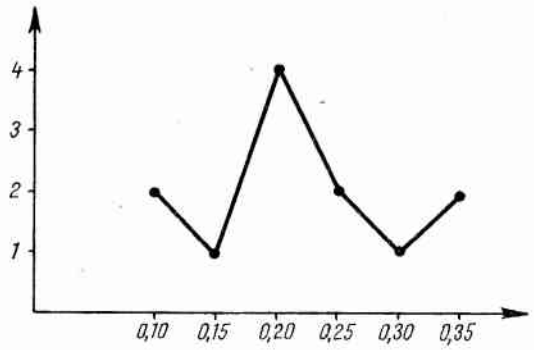


Fig. 25

e) La toate loturile analizate conținutul de baze volatile este mult inferior limitei maxime admise prin STAS. Atît modul cît și media sînt jumătate din limita maximă admisă. Dispersia fiind foarte mică, conținutul de baze volatile al produsului este foarte apropiat de 0,22 miliechivalenți pe kg, deci puritatea produsului este foarte bună.

6. *Pentru datele din tabela* 1, *problema* 1, *se cere:*

a) *Să se facă împărțirea în clase, de mărime* 1 ml *cu convenția ca extremitatea dreaptă a fiecărei clase să nu aparțină clasei.*

b) *Să se completeze tabela obținută la punctul* a) *cu frecvențele absolute cumulate crescătoare și descrescătoare, cu frecvențe relative și cu valoarea centrală a clasei.*

c) *Poligonul frecvențelor.*

d) *Să se calculeze media folosind metoda zeroului fals, luînd* $x_0 = 505{,}5$.

e) *Modul.*

f) ***Interpretarea** rezultatelor obținute știind că prin STAS-ul* 12-62 *se admit* 500 ml $\pm$ 10.

(Fabrica de ulei și produse derivate „Unirea" Iași.)

Rezolvare

a)

Clase în ml	n_i
492—493	3
493—494	3
494—495	3
495—496	2
496—497	4
497—498	6
498—499	13
499—500	17

Clase în ml	n_i
500—501	20
501—502	9
502—503	5
503—504	4
504—505	3
505—506	2
506—507	2
507—508	2
510—511	2

b)

Clase	n_i	$n_i \uparrow$	$n_i \downarrow$	f_i	Valoarea centrală x_i
492—493	3	3	100	0,03	492,5
493—494	3	6	97	0,03	493,5
494—495	3	9	94	0,03	494,5
495—496	2	11	91	0,02	495,5
496—497	4	15	89	0,04	496,5
497—498	6	21	85	0,06	497,5
498—499	13	34	79	0,13	498,5
499—500	17	51	66	0,17	499,5
500—501	20	71	49	0,20	500,5
501—502	9	80	29	0,09	501,5
502—503	5	85	20	0,05	502,5
503—504	4	89	15	0,04	503,5
504—505	3	92	11	0,03	504,5
505—506	2	94	8	0,02	505,5
506—507	2	96	6	0,02	506,5
507—508	2	98	4	0,02	507,5
510—511	2	100	2	0,02	510,5

c) Se obține figura 26.

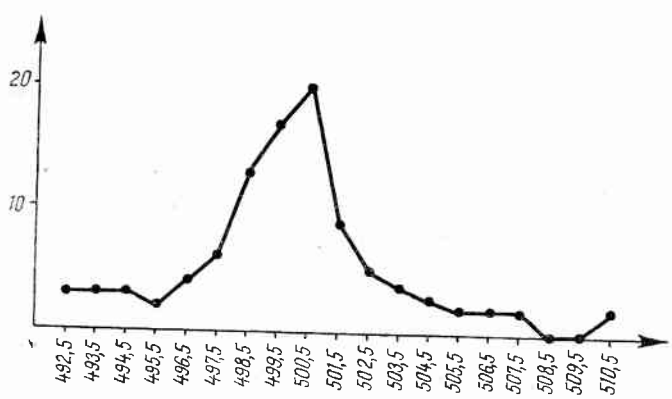


Fig. 26

d) Se obține tabelul 16 în care sînt trecute și calculele.

Tabelul 16

x_i	$x_i - x_0$	f_i	$f_i(x_i - x_0)$
492,5	−8	0,03	−0,24
493,5	−7	0,03	−0,21
494,5	−6	0,03	−0,18
495,5	−5	0,02	−0,10
496,5	−4	0,04	−0,16
497,5	−3	0,06	−0,18
498,5	−2	0,13	−0,26
499,5	−1	0,17	−0,17
500,5	0	0,20	0
501,5	1	0,09	0,09
502,5	2	0,05	0,10
503,5	3	0,04	0,12
504,5	4	0,03	0,12
505,5	5	0,02	0,10
506,5	6	0,02	0,12
507,5	7	0,02	0,14
510,5	10	0,02	0,20

de unde $\bar{x} = \Sigma f_i(x_i - x_0) + x_0 = -0,61 + 500,5 = 499,89$.

e) $M = 500,5$.

f) Lotul corespunde cerințelor în ceea ce privește conținutul sticlelor, cum rezultă din valoarea medie, mod și din poligonul frecvențelor.

7. *Tabelul* 17 *cuprinde date culese în anul* 1970 *în comuna Berbești județul Maramureș, referitoare la numărul de copii în familie în generația actuală de copii în vîrstă de* 7—14 *ani și numărul de frați în familie în generația parentală.*[*)]

Se cere:

a) *Modul și media pentru fiecare serie în parte.*

b) *Histograma pentru fiecare serie.*

c) *Analizînd rezultatele obținute să se tragă concluzii asupra natalității celor două generații.*

(Centrul de cercetări biologice, Iași.)

*) Părinții copiilor în vîrstă de 7—14 ani, în acest caz.

Rezolvare. a) Pentru generația actuală $M = 2$; $\bar{x} = 3{,}40$.
Pentru generația parentală $M = 4$; $\bar{x} = 5{,}24$.

Tabelul 17

Nr. de frați în familie	Generația actuală 7—14 ani, număr de familii	Generația parentală, număr de familii
1	18	6
2	66	14
3	46	34
4	21	36
5	12	30
6	22	26
7	7	15
8	6	17
9	2	13
10	0	5
11	0	1
12	0	1
13	0	0
14	0.	0
15	0	1
16	0	1

b) Se obțin respectiv figurile 27 și 28.

c) Se constată că natalitatea în generația parentală este mai mare decît în generația actuală, familiile din generația parentală avînd în medie între 4 și 6 copii, iar în generația actuală familiile avînd în medie între 2 și 3 copii.

8. *Pentru studiul statistic al stilului poeților V. Cîrlova, V. Alecsandri și M. Eminescu s-au fișat pe grupe de substantive, adjective și verbe cuvintele care apar în unele poezii ale lor, obținîndu-se rezultatele din tabelul* 18.

Tabelul 18

	substantive	adjective	verbe
V. Cîrlova	137	58	96
V. Alecsandri	480	239	446
M. Eminescu	826	250	461

Știind că substantivele servesc în general la descrierea cadrului sau la analiza stărilor psihice, adjectivele dau imaginea descriptivă, desfășurarea mai lentă

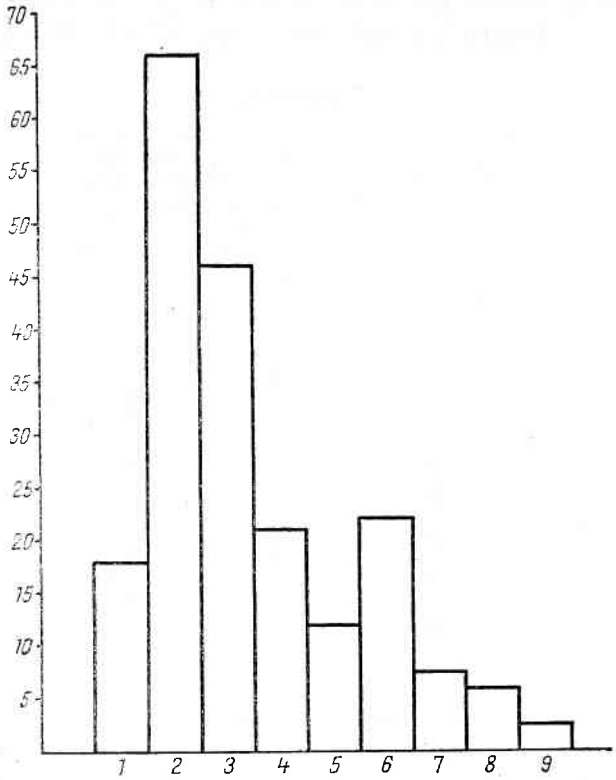

70
65
60
55
50
45
40
35
30
25
20
15
10
5
1
2
3
4
5
6
7
8
9

Fig. 27

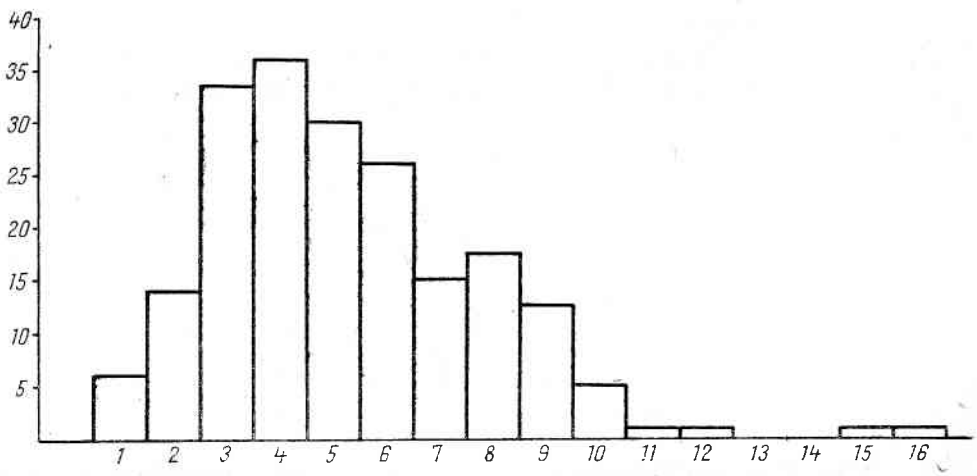

40
35
30
25
20
15
10
5
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13
14
15
16

Fig. 28

a ideilor, iar verbele exprimă acțiunea, desfășurarea faptelor, dinamism; calculîndu-se frecvențele, să se tragă concluzii asupra stilului celor trei poeți.

(Catedra de algebră, Facultatea de matematică-mecanică, Iași.)

Rezolvare. Se obțin următoarele frecvențe:

	substantive	adjective	verbe
V. Cîrlova	0,47	0,20	0,33
V. Alecsandri	0,41	0,21	0,38
M. Eminescu	0,54	0,16	0,30

Se observă o diferențiere a stilului la cei trei poeți reprezentativi pentru o perioadă din dezvoltarea poeziei românești, descrierea cadrului sau analiza stărilor psihice fiind mai pronunțată la Eminescu și cel mai puțin pronunțată la Alecsandri, situația inversîndu-se la acțiune, desfășurarea faptelor, dinamism.

Metodele statistice aplicate în lingvistică oferă posibilitatea de a sesiza anumite particularități stilistice.

9. *S-a analizat cifra de permanganat la* 11 *loturi de caprolactamă**) *cristalizată, tip A, datele obținute fiind cuprinse în tabelul* 19.

Tabelul 19

Nr. crt. lot	Cifra de permanganat în secunde	Nr. crt. lot	Cifra de permanganat în secunde
1	6 800	7	5 000
2	8 200	8	5 400
3	4 200	9	14 900
4	5 700	10	10 200
5	9 300	11	8 700
6	12 200		

a) *Se cere să se calculeze media și mediana.*

b) *știind că cifra de permanganat este un indicator de puritate și că cifra minimă admisă prin* STAS 7311/1969 *este egală cu* 3000; *să se interpreteze rezultatele obținute.*

(Uzina de fibre sintetice, Săvinești.)

Rezolvare. a) $\bar{x} = 8\,560$ iar $Me = 8\,200$.

*) vezi pagina 147

b) La toate loturile analizate cifra de permanganat este mult superioară cifrei minime admisă de STAS, de asemenea media și mediana, puritatea produsului fiind foarte bună (vezi și problema 5).

10. *Rezultatele experimentale cu îngrășăminte (N = azot, P = fosfor și K = potasiu) la grîu de toamnă sînt date în tabelul* 20.

Tabelul 20

Nr. crt.	Doza de îngrășăminte, substanța activă în kg	Producția în kg la ha					
		Repetiția					
		I	II	III	IV	V	VI
1	neîngrășat (martor)	1650	1450	1580	1390	1475	1575
2	N 48 + K 32	2520	2350	2675	2400	2500	2390
3	N 48 + K32 + P32	2790	2690	2850	2685	2725	2750
4	N 48 + K32 + P64	2990	2875	2790	3150	2880	2950
5	N 48 + K32 + P96	2830	2775	2925	2850	2990	3050
6	N 96 + K60	3140	2970	2895	3275	3120	3050
7	N 96 + K60 + P32	3360	3375	3290	3310	3225	3390
8	N 96 + K60 + P64	3590	3475	3600	3550	3495	3525
9	N 96 + K60 + P96	3380	3290	3325	3450	3375	3320

Se cere:

a) *Să se stabilească care este doza optimă de îngrășăminte din punctul de vedere al producției medii de grîu la hectar.*

b) *Să se exprime în frecvențe media la hectar corespunzătoare fiecărei doze de îngrășăminte în raport cu martorul (considerat ca* 100 %*) și să se reprezinte diagrama seriei obținute.*

(Stațiunea experimentală agricolă Podul Iloaiei, Județul Iași.)

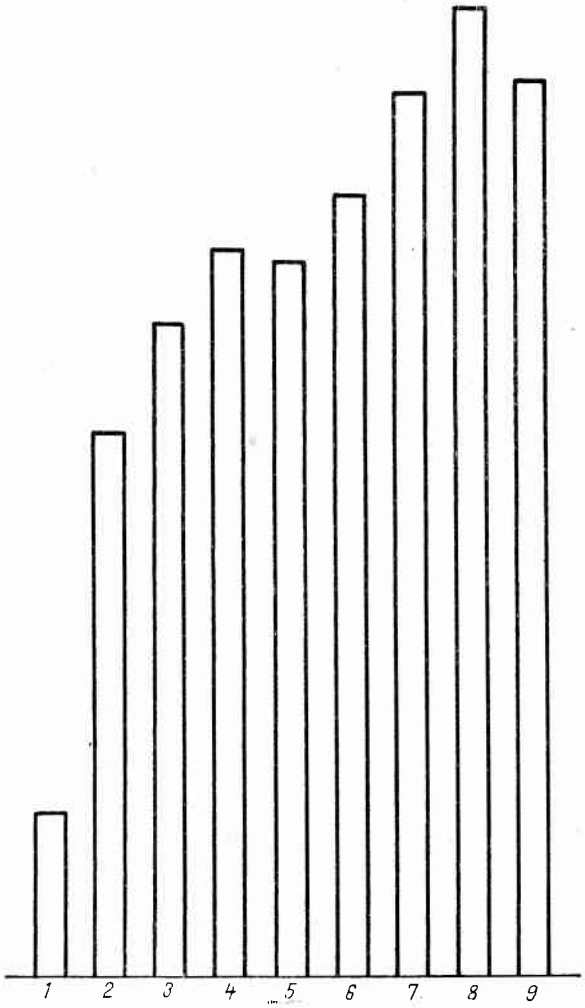
Rezolvare. Se obține tabelul 21.

Tabelul 21

Nr. crt.	Media	%
1	1520	100
2	2472,50	162,66
3	2748,33	180,81
4	2939,16	193,36
5	2903,33	191
6	3075	202,30
7	3325	218,75
8	3539,16	232,84
9	3356,66	220,83

a) Doza optimă corespunde lui N96 + K60 + P64.
b) Se obține diagrama din figura 29.

Fig. 29



Lungimile coloanelor au fost reduse.

11. *Datele obținute prin analizarea rezistenței betoanelor marca B* 200*) *livrate de o stație de betoane sînt cuprinse în tabelul* 22.

În STAS 1275-62 *se cere ca să fie îndeplinită condiția:*

$$R^k \geqslant 0{,}7R_b,$$

*) Rezistența de rupere prin compresiune a cuburilor de 20 cm latura, la vîrsta de 28 zile, ținute în condiții standard.

Tabelul 22

Nr. crt. probă	Rezistența în kg · forță / cm²	Nr. crt. probă	Rezistența în kg · forță/cm²	Nr. crt. probă	Rezistența în kg · forță/cm²
1	228	31	217	61	242
2	295	32	200	62	262
3	210	33	255	63	255
4	163	34	207	64	185
5	188	35	237	65	173
6	228	36	277	66	193
7	235	37	233	67	230
8	148	38	270	68	225
9	247	39	232	69	253
10	207	40	232	70	198
11	218	41	187	71	152
12	248	42	268	72	208
13	220	43	255	73	160
14	218	44	195	74	170
15	180	45	217	75	180
16	173	46	193	76	133
17	228	47	182	77	162
18	268	48	208	78	208
19	277	49	177	79	195
20	163	50	178	80	156
21	245	51	237	81	252
22	210	52	220	82	178
23	255	53	232	83	230
24	267	54	162	84	223
25	298	55	210	85	247
26	210	56	132	86	198
27	187	57	212	87	192
28	245	58	155	88	177
29	185	59	222	89	180
30	270	60	227	90	205

unde R^k este rezistența specifică dată de $R^k = \bar{x} - t\sigma$, t fiind un coeficient (care depinde și de numărul de probe) stabilit prin același STAS *și care în cazul nostru este egal cu* 1,645 *iar R_b este marca betonului.*

Să se stabilească dacă betoanele considerate satisfac în ceea ce privește rezistența, condiția cerută de STAS.

(Trustul de construcții, Iași.)

Rezolvare: Avem $\bar{x} = 216$, $\sigma = \sqrt{\frac{128270}{90}} \simeq 38$,

de unde

$R^k = 216 - 1{,}645 \cdot 38 = 154$ kg · forță/cm², iar $0{,}7 \cdot R_b = 0{,}7 \cdot 200 = 140$, deci $R^k > 0{,}7\ R_b$, deci este satisfăcută condiția cerută de STAS.

12. *În vederea stabilirii nivelului de dezvoltare fizică a copiilor, în funcție de mediul economico-social, s-a măsurat statura unor serii de fete, pe grupe de vîrstă între* 11—15 *ani din mediul urban (orașul Iași) și din mediul rural (satele Bălteni, Cicera, Comarna, Osoi, Probota, Tomești și Vînători din județul Iași). S-au obținut datele din tabelul* 23.

Tabelul 23

Talia în cm	11 ani		12 ani		13 ani		14 ani		15 ani	
	urban	rural	urban	rural	urban	rural	urban	rural	urban	rural
121	1									
122										
123		1		1						
124		1								
125	1	4								
126	1									
127		2		1						
128		5		1						
129	4	3								
130	1	3		1						
131	5	8		1		1				
132	7	2								
133	3	5	1	3						
134	5	7	1	5		1				
135	1	9	1	2		1				
136	3	8	4	3		2				
137	6	6	3	6		3				
138	4	5	2	4	1	3				
139	6	3	1	7		5		2		
140	10	7	2	5	4	4		1		
141	10	8	2	5	3	3		1		
142	10	2	4	7	5	5	2			2
143	4	1	6	3	3	3	2	2		1
144	8	2	8	7	2	8	2	4	1	1
145	10		6	6	3	5	2	4		1
146	11	3	7	6	6	4	2	3	1	
147	8	1	9	5	5	7	3	3		
148	4	1	5	4	8	7	1	2	3	2
149	6		11	7	12	10	5	1	4	5
150	2	1	7	2	4	6	5	8	2	8
151	7	1	6	2	3	6	4	5	1	8
152	7	1	13	2	5	6	17	8	7	5
153	4		13	2	11	3	2	12	6	9
154	2		5		4	1	10	7	4	8
155			8	1	9	3	10	15	10	7
156	3		5	3	8	1	11	10	13	7
157	1		5		11	2	11	3	5	8
158	1		3		9	1	12	3	12	4
159			2		7	1	10	6	6	5
160	1		5		7	2	6	3	4	5
161			2		5		9	3	7	10
162					3		7	1	6	3
163	1		1		4		9		4	6
164					4		3		6	2
165			1		1		6		5	
166					2		6		3	
167			1				1			
168					2		4		3	
169					1		2		1	
170			1		1				1	
171										
172										
173							2			

Se cere:

a) *Gruparea datelor în clase de* 5 cm *începînd de la* 121 *cm pentru fiecare grupă de vîrstă şi separat pentru mediul urban şi rural.*

b) *Să se completeze tabelele obţinute la punctul a) cu frecvenţele relative, frecvenţe relative cumulate crescătoare şi descrescătoare şi valoarea centrală a clasei.*

c) *Să se reprezinte pe un acelaşi grafic poligonul frecvenţelor pentru mediul urban şi mediul rural, dar pentru fiecare grupă de vîrstă separat. Analog, să se reprezinte frecvenţele cumulate crescătoare şi descrescătoare.*

d) *Să se interpreteze rezultatele din tabelul* 24,

Tabelul 24

	11 ani		12 ani		13 ani		14 ani		15 ani	
	urban	rural	urban	rural	urban	rural	urban	rural	urban	rural
$\bar{x}$	143,09	136,19	150	142,80	153,87	146,93	157,36	152,97	158,12	155,47
σ	7,56	6,08	6,84	6,55	7,01	6,04	6,28	5,11	5,31	5,00

precum şi rezultatele obţinute la celelalte puncte.

(Centrul de cercetări biologice, Iaşi.)

Rezolvare. a) Se obţine tabelul 25.

Tabelul 25

Talia în cm	11 ani		12 ani		13 ani		14 ani		15 ani	
	urban	rural	urban	rural	urban	rural	urban	rural	urban	rural
121—126	2	6		1						
126—131	6	13		3						
131—136	21	31	3	11		3				
136—141	29	29	12	25	5	17		3		
141—146	42	13	26	28	16	24	8	11	1	5
146—151	31	6	39	24	35	34	16	17	10	15
151—156	20	2	45	7	32	19	43	47	28	37
156—161	6		20	3	42	7	50	25	40	29
161—166	1		4		17		34	4	28	20
166—171			2		6		13		8	
171—176							2			
Total	158	100	151	102	153	104	166	107	115	106

b) Se obțin corespunzător pentru fiecare grupă de vîrstă tabelele:

11 ani

Clase	Valoarea centrală	Urban				Rural			
		n_i	f_i	$f_i \uparrow$	$f_i \downarrow$	n_i	f_i	$f_i \uparrow$	$f_i \downarrow$
121—126	123	2	0,01	0,01	1	6	0,06	0,06	1
126—131	128	6	0,04	0,05	0,99	13	0,13	0,19	0,94
131—136	133	21	0,13	0,18	0,95	31	0,31	0,50	0,81
136—141	138	29	0,18	0,36	0,82	29	0,29	0,79	0,50
141—146	143	42	0,27	0,63	0,64	13	0,13	0,92	0,21
146—151	148	31	0,20	0,83	0,37	6	0,06	0,98	0,08
151—156	153	20	0,13	0,96	0,17	2	0,02	1	0,02
156—161	158	6	0,04	1	0,04				
161—166	163	1	0,00	1	0,00				

12 ani

Clase	Valoarea centrală	Urban				Rural			
		n_i	f_i	$f_i \uparrow$	$f_i \downarrow$	n_i	f_i	$f_i \uparrow$	$f_i \downarrow$
121—126	123					1	0,01	0,01	1
126—131	128					3	0,03	0,04	0,99
131—136	133	3	0,02	0,02	1	11	0,11	0,15	0,96
136—141	138	12	0,08	0,10	0,98	25	0,24	0,39	0,85
141—146	143	26	0,17	0,27	0,90	28	0,28	0,67	0,61
146—151	148	39	0,26	0,53	0,73	24	0,23	0,90	0,33
151—156	153	45	0,30	0,83	0,47	7	0,07	0,97	0,10
156—161	158	20	0,13	0,96	0,17	3	0,03	1	0,03
161—166	163	4	0,03	0,99	0,04				
166—171	168	2	0,01	1	0,01				

13 ani

Clase	Valoarea centrală	Urban				Rural			
		n_i	f_i	$f_i \uparrow$	$f_i \downarrow$	n_i	f_i	$f_i \uparrow$	$f_i \downarrow$
131—136	133					3	0,03	0,03	1
136—141	138	5	0,03	0,03	1	17	0,16	0,19	0,97
141—146	143	16	0,10	0,13	0,97	24	0,23	0,42	0,81
146—151	148	35	0,23	0,36	0,87	34	0,33	0,75	0,58
151—156	153	32	0,21	0,57	0,64	19	0,18	0,93	0,25
156—161	158	42	0,27	0,84	0,43	7	0,07	1	0,07
161—166	163	17	0,12	0,96	0,16				
166—171	168	6	0,04	1	0,04				

14 ani

Clase	Valoarea centrală	Urban				Rural			
		n_i	f_i	$f_i \uparrow$	$f_i \downarrow$	n_i	f_i	$f_i \uparrow$	$f_i \downarrow$
136—141	138					3	0,03	0,03	1
141—146	143	8	0,05	0,05	1	11	0,10	0,13	0,97
146—151	148	16	0,10	0,15	0,95	17	0,16	0,29	0,87
151—156	153	43	0,26	0,41	0,85	47	0,44	0,73	0,71
156—161	158	50	0,30	0,71	0,59	25	0,23	0,96	0,27
161—166	163	34	0,20	0,91	0,29	4	0,04	1	0,04
166—171	168	13	0,08	0,99	0,09				
171—176	173	2	0,01	1	0,01				

15 ani

Clase	Valoarea centrală	Urban				Rural			
		n_i	f_i	$f_i \uparrow$	$f_i \downarrow$	n_i	f_i	$f_i \uparrow$	$f_i \downarrow$
141—146	143	1	0,01	0,01	1	5	0,07	0,07	1
146—151	148	10	0,09	0,10	0,99	15	0,14	0,21	0,93
151—156	153	28	0,24	0,34	0,90	37	0,35	0,56	0,79
156—161	158	40	0,35	0,79	0,66	29	0,27	0,83	0,44
161—166	163	28	0,24	0,93	0,31	20	0,17	1	0,17
166—171	168	8	0,07	1	0,07				

c) Se obține corespunzător figura 30—34, iar pentru frecvențele cumulate figura 35—39 corespunzător pe grupe de vîrstă, unde linia continuă corespunde la mediul urban, iar cea punctată la mediul rural.

d) În mediul urban la toate grupele de vîrstă nivelul de dezvoltare fizică este mai mare decît în mediul rural, fenomenul fiind mai accentuat la clasele de vîrstă mai mică și atenuîndu-se progresiv, după cum rezultă din compararea mediilor, din figurile 30—34 și din figurile 35—39.

Din analizarea abaterilor medii pătratice rezultă că în mediul urban împrăștierea înălțimilor față de valoarea medie este mai mare decît în mediul rural, ceea ce se explică prin o mare eterogenitate a condițiilor de viață a populației din orașe, în mediul rural condițiile de viață fiind mai omogene. Se observă de asemenea că la ultima grupă de vîrstă abaterile medii pătratice scad, diferențele în nivelul statural fiind mai atenuate, fetele apropiindu-se de sfîrșitul perioadei de creștere.

Fig. 30

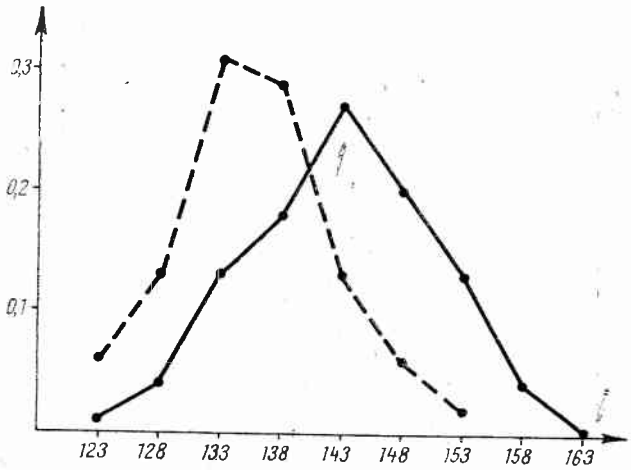


Fig. 31

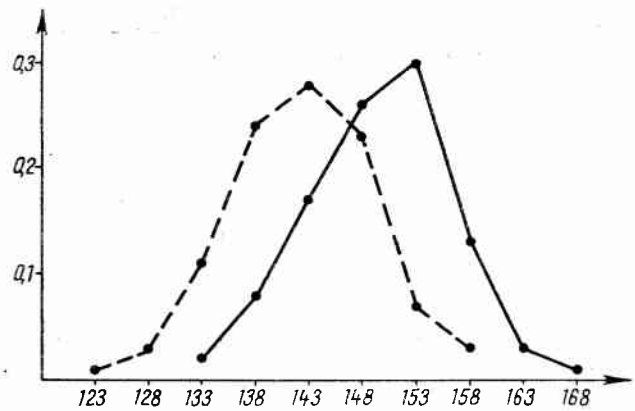
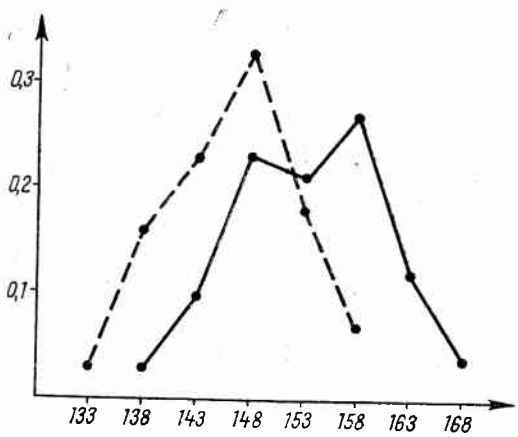


Fig. 32



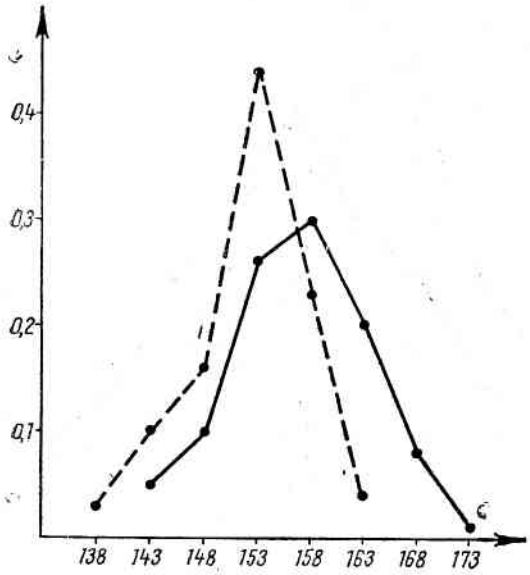


Fig. 33

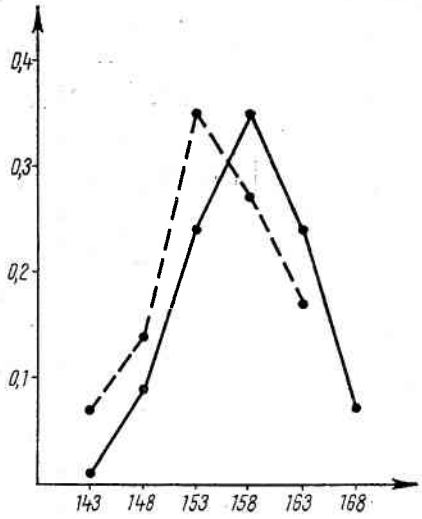


Fig. 34

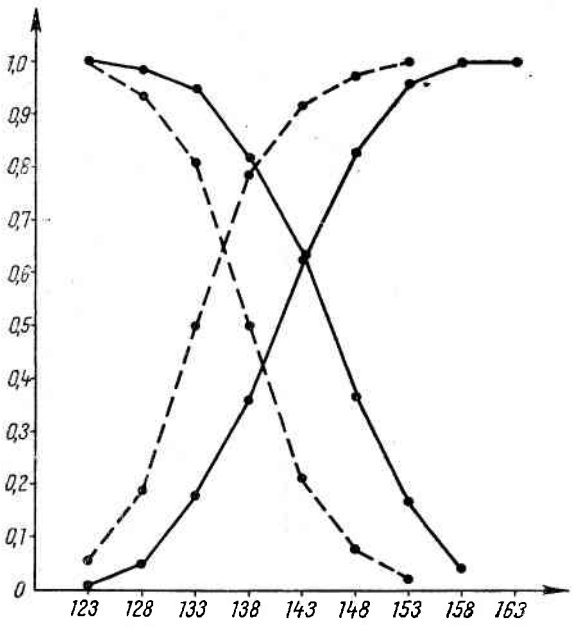


Fig. 35

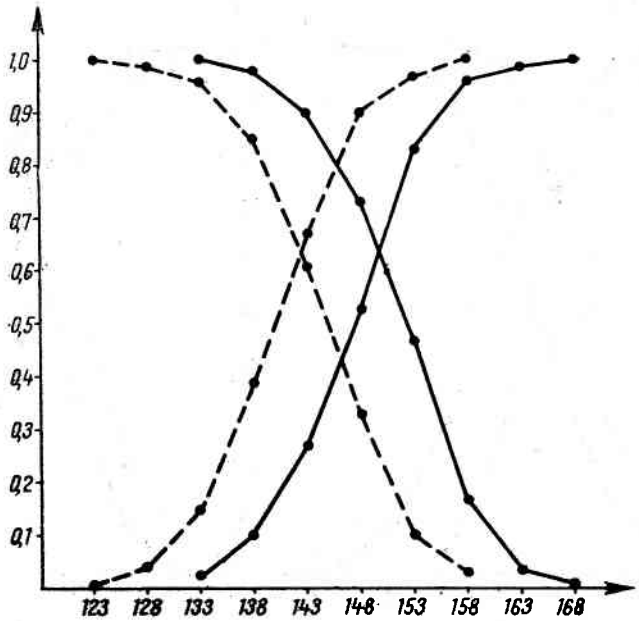

1,0
0,9
0,8
0,7
0,6
0,5
0,4
0,3
0,2
0,1
123 128 133 138 143 148 153 158 163 168

Fig. 36

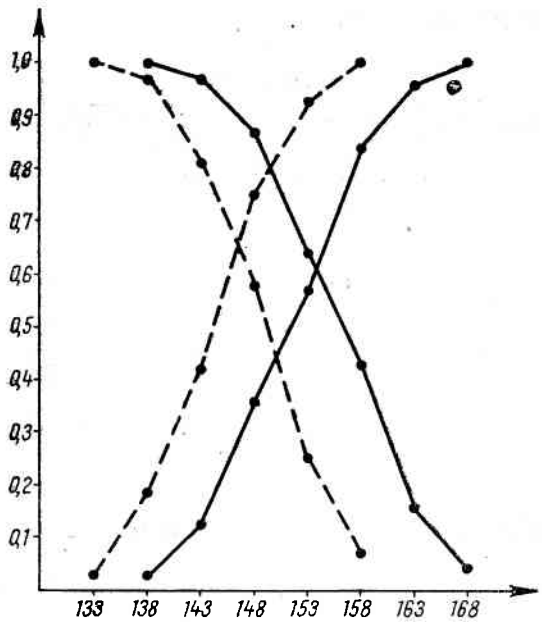

1,0
0,9
0,8
0,7
0,6
0,5
0,4
0,3
0,2
0,1
133 138 143 148 153 158 163 168

Fig. 37

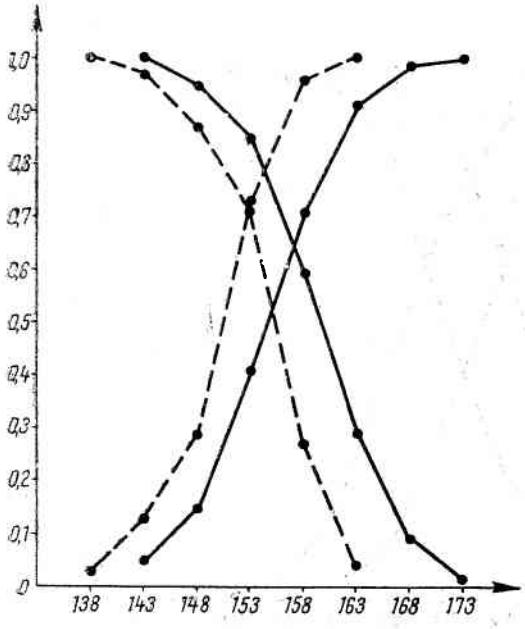


Fig. 38

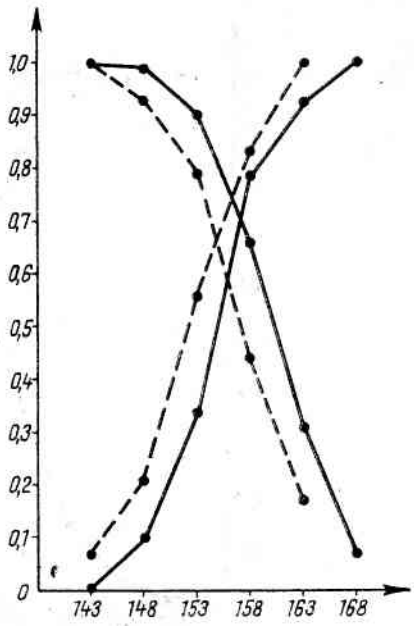


Fig. 39

13. *Pentru participanții din Iași la finala pe țară la haltere, juniori, din anul* 1971, *dăm în tabelul* 26 *greutatea sportivului* *) *și rezultatele obținute la triatlon clasic* **) *exprimate în kg.*

Tabelul 26

Nr. crt.	Greutatea x_i	Triatlon y_i	Nr. crt.	Greutatea x_i	Triatlon y_i
1	67	272	11	52	217
2	52	187	12	110	230
3	110	187	13	67	230
4	56	192	14	67	230
5	73	197	15	69	240
6	65	202	16	76	242
7	60	205	17	77	245
8	60	212	18	82	287
9	110	212	19	73	292
10	52	215			

Se cere:

a) *Tabelul cu dublă intrare greutate — triatlon.*

*) Sportivii sînt de la școala sportivă „Unirea" și cluburile Nicolina și Universitatea din Iași.

**) smuls + împins + aruncat

b) *Să se reprezinte punctele* (x_i, y_i) *și să se interpreteze rezultatul obținut.*
(Clubul sportiv Universitatea Iași).

Rezolvare. a) Se obține tabelul:

Triatlon \ Greutate	52	56	60	65	67	69	73	76	77	82	110	Total
187	1										1	2
192		1										1
197							1					1
202				1								1
205			1								1	1
212			1									2
215	1											1
217	1											1
230					2						1	3
240						1						1
242								1				1
245									1			1
272					1							1
287										1		1
292							1					1
Total	3	1	2	1	3	1	2	1	1	1	3	19

b) Se obține figura 40.

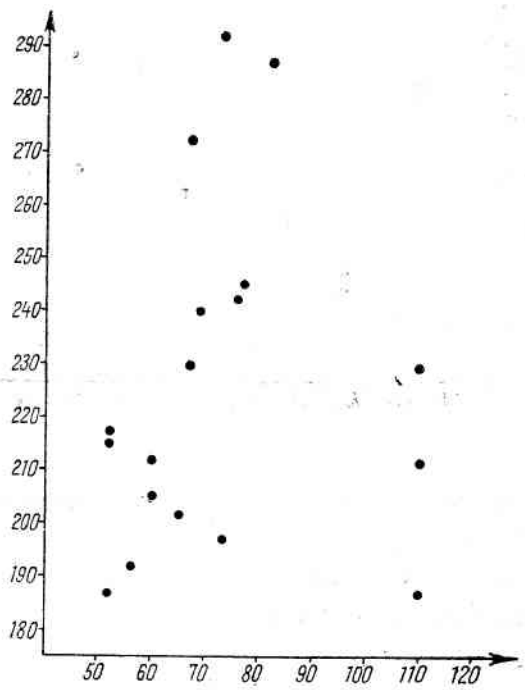


Fig. 40

Punctele $(x_i\ y_i)$ nu se grupează în jurul unei drepte, deoarece greutatea ridicată de sportiv la triatlon clasic este în funcție de mai mulți factori printre care: vechimea în sport, vîrsta de la care a început să practice sportul, tehnica mișcării, raportul dintre țesutul muscular și cel adipos, vîrsta biologică a sportivului, condițiile de viață etc. și deci nu este influențată puternic de greutatea proprie a sportivului.

14. *Pentru un lot de sportivi din atletică grea s-au făcut verificări pentru genuflexiuni cu bare pe spate și ridicarea halterei la stilul smuls, obținîndu-se rezultatele din tabelul* 27, *exprimate în kg.*

Tabelul 27

Nr. crt.	Genuflexiuni x_i	stilul smuls y_i
1	200	130
2	180	110
3	160	105
4	130	87
5	130	90
6	120	82
7	110	80

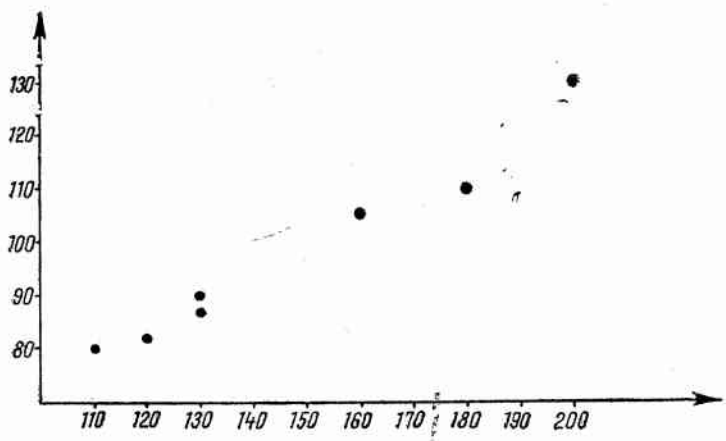


Fig. 41

Să se reprezinte punctele (x_i, y_i) *și să se determine dreapta de ajustare prin metoda celor mai mici pătrate.*

(Clubul sportiv „Universitatea" Iași).

Rezolvare: Se obține figura 41 iar

$\bar{x} = 147{,}14 \quad \bar{y} = 97{,}71 \quad n = 7,$

deci

$$a = \frac{\sum_{i=1}^{7} x_i y_i - n\bar{x}\bar{y}}{\sum_{i=1}^{7} x_i^2 - n\bar{x}^2} = \frac{3610{,}66}{6748{,}75} = 0{,}53$$

iar $b = \bar{y} - a\bar{x} = 19{,}73$, deci $y = 0{,}53x + 19{,}73$

Rezultatul la acest stil dinamic este puternic influențat de forța picioarelor, aceasta din urmă fiind indicată și prin rezultatele la genuflexiuni, ceea ce justifică așezarea punctelor (x_i, y_i), în jurul unei drepte.

15. *Pentru un lot de sportivi din atletica grea s-au făcut verificări pentru genuflexiuni cu bare pe spate și ridicarea halterei la stilul aruncat. Rezultatele obținute exprimate în kg sînt cuprinse în tabelul* 28.

Tabelul 28

Nr. crt.	Genuflexiuni x_i	Stilul aruncat y_i
1	200	160
2	180	140
3	160	127
4	130	110
5	120	107
6	110	97
7	110	92
8	105	95

Să se reprezinte punctele (x_i, y_i) *și să se determine dreapta de ajustare prin metoda*

a) *celor mai mici pătrate;*

b) *mediilor discontinue,* grupîndu-se cîte patru puncte în ordinea dată.

(Clubul sportiv „Universitatea" Iași).

Rezolvare: Se obține fig. 42.

a) $\bar{x} = 139{,}37$; $\bar{y} = 116$ $n = 8$, deci

$$a = \frac{6089{,}44}{9133{,}03} = 0{,}66 \qquad b = 24{,}02$$

deci $y = 0{,}66x + 24{,}02$.

b) Punctul mediu pentru primele patru puncte este (167,5; 134,25) iar pentru ultimele patru puncte (111,25; 97,75), de unde dreapta care trece prin cele două puncte este

$$y = 0{,}65x + 25{,}59.$$

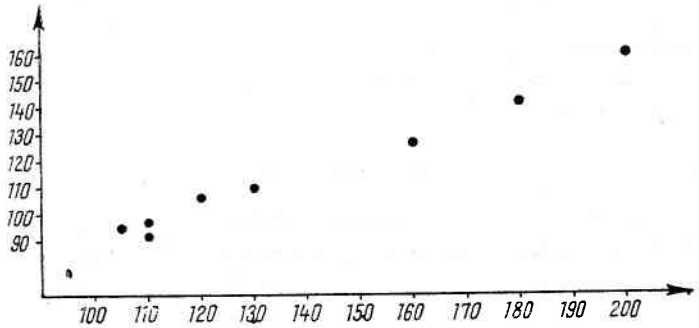


Fig. 42

Ajustarea dreptei prin metoda mediilor discontinue necesită în general mai puțin calcul decît metoda celor mai mici pătrate, dar dreapta obținută depinde de alegerea celor două grupe de puncte (vezi problema 26, § 3).

Punctele (x_i, y_i) au putut fi ajustate printr-o dreaptă, deoarece există o legătură foarte puternică între acest stil dinamic și genuflexiuni cu bara pe spate (vezi problema 14).

16. *Pentru determinarea concentrației acidului clorhidric (HCl) dintr-o soluție, se face titrarea cu hidroxid de sodiu (Na OH) a cărui concentrație este cunoscută, de exemplu o soluție* 1*N* (1 *normală). Se adaugă cantități cunoscute de Na OH, de exemplu* 0,2; 0,4,.. *și se măsoară conductibilitatea soluției în unități convenționale:* 1,2, ... *etc.*

Punctele (x_i, y_i) *unde* x_i = *cantitățile în echivalenți de Na OH adăugate soluției, iar* y_i = *numărul de unități convenționale ale conductibilității corespunzătoare, reprezentate în plan se pot ajusta după două drepte concurente. Abscisa punctului de intersecție reprezintă concentrația acidului clorhidric din soluție.*

Să se găsească concentrația acidului clorhidric dintr-o soluție, pentru care s-au obținut datele din tabelul 29.

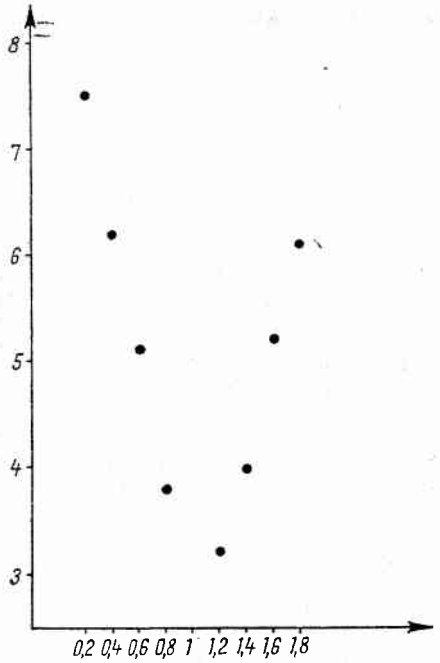
Tabelul 29

Echivalenți	Conductibilitate
0,2	7,5
0,4	6,2
0,6	5,1
0,8	3,8
1,2	3,2
1,4	4
1,6	5,2
1,8	6,1

ajustîndu-se dreptele prin metoda mediilor discontinue.

(Catedra de Chimie Analitică, Facultatea de chimie, Iași).

Fig. 43



Rezolvare. Reprezentarea punctelor (x_i, y_i) este dată în figura 43. Dreapta care trece prin punctele medii (0,3; 6,8) și (0,7; 4,4) are ecuația

$$y = -60x + 86$$

iar dreapta care trece prin punctele medii (1,3; 3,6) și (1,7; 5,6) are ecuația

$$y = 5x - 2,9$$

Abscisa punctului de intersecție este $x = 1,36$, deci soluția are o concentrație de aproximativ 1,36 echivalenți.

§ 3. Exerciții și probleme propuse

1. Pentru verificarea unei mașini de preambalat de tip „Multipac" pentru pachete de margarină cu lapte „Ideal" de 250 ± 4 gr. (N.I.I. 390/67)* au fost cîntărite cîte 10 pachete luate la întîmplare, în fiecare oră, în decursul

* Normă internă care fixează limitele de greutate.

unui schimb. Mașina a fost reglată la începutul lucrului la gramaj de 250 gr și a produs în cele 8 ore de lucru 6 300 kg margarină preambalată.

Rezultatele în ordinea obținerii sînt cuprinse în tabelul 30.

Tabelul 30

250,1	250	250	249,8	248	247	250,2	250
250,1	250,1	250	249,7	248,9	248	251	250
250,1	249,9	249,9	250	248,8	247,8	250	250
250	250	249,9	249,9	248,9	248	249,9	249,9
250	249,9	249,8	249,9	249	247,7	251	250
250,1	250	249,9	249,8	248,8	247,8	251,2	249,9
250,1	250	249,9	249	249	248,8	249	250
250	249,9	249,6	249	249	248,7	250	249,8
249,9	250	250	248,7	247	248	251	249,9
250	249,9	249,9	248,9	247,6	248,8	251	249,9

Să se facă gruparea datelor.

(Fabrica de uleiuri vegetale „Unirea" Iași).

2. În urma analizelor chimice la 30 de loturi de margarină vegetală cu lapte „Ideal", s-a obținut pentru caracteristice fizico-chimice tabelul 31 cu date:

Tabelul 31

Nr. lotului	Aciditatea în grade	Conținut materii grase %	Umiditate %	Pct. de topire prin alunecare °C
1	1,21	83,26	16,47	33
2	1,21	83,33	16,00	33
3	1,21	83,39	16,29	34
4	1,20	83,93	15,63	34
5	1,21	82,70	16,41	33
6	1,20	83,25	16,05	33
7	1,21	83,30	15,86	33
8	1,20	83,48	16,42	33
9	1,21	83,39	16,12	33
10	1,41	83,40	16,22	33
11	1,41	83,27	16,47	34
12	1,21	83,03	16.45	33
13	1,21	83,26	15,77	33
14	1,21	83,57	15,80	33

Nr. lotului	Aciditatea în grade	Conținut materii grase %	Umiditate %	Pct. de topire prin alunecare, °C
15	1,20	84,00	15,90	33
16	1,21	84,21	15,64	33
17	1,21	83,69	16,12	33
18	1,21	83,92	15,97	33
19	1,21	84,54	15,33	33
20	1,21	83,96	15,79	33
21	1,21	83,69	15,93	33
22	1,21	83,29	15,77	32
23	1,21	83,70	15,78	33
24	1,41	82,89	16,40	34
25	1,21	83,45	16,16	33
26	1,21	83,75	16,15	33
27	1,21	83,42	16,42	34
28	1,21	82,86	16,15	33
29	1 41	83,65	15,94	33
30	1,21	83,65	15,66	33

Să se facă gruparea datelor pentru fiecare caracteristică.

(Fabrica de uleiuri vegetale „Unirea" Iași).

3. Investițiile pe ramurile economiei naționale în județul Iași în anul 1965 sînt date în tabelul 32.

Tabelul 32

Ramuri	milioane lei	%
Industrie	317	35,6
Construcții	20	2,3
Agricultură	200	22,5
Silvicultură	7	0,8
Transporturi	59	6,6
Telecomunicații	5	0,6
Circulația mărfurilor	40	4,5
Gospodărie comunală	166	18,7
Învățămînt	44	4,9
Cultură și artă	4	0,4
Știință și deservire științifică	3	0,3
Ocrotirea sănătății	21	2,3
Alte ramuri	4	0,5
Total județ	890	100

Să se reprezinte prin dreptunghiuri diagrama corespunzătoare. Să se compare cu rezultatele problemei 2, § 2.

(Direcția județeană de statistică, Iași).

4. Puterea instalată a grupurilor electrogene în kW, din județul Iași, în anii 1965—1969 este dată în tabelul 33.

Tabelul 33

Anii	kW	%
1965	12281	19,68
1966	62779	100,59
1967	61396	98,38
1968	62172	99,62
1969	62408	100

Procentele au fost calculate luîndu-se ca bază anul 1969.

Se cere diagrama care reprezintă situația în procente pe ani a puterii instalate a grupurilor electrogene.

(Direcția județeană de statistică, Iași).

5. Tabelul 34 cuprinde numărul paturilor în spitalele din județul Iași, în anii 1965—1970.

Tabelul 34

Anii	Nr. paturilor	%
1965	5183	79,8
1966	5271	81,2
1967	5479	84,4
1968	6084	93,6
1969	6059	93,3
1970	6494	100

Procentele s-au calculat luîndu-se ca bază numărul paturilor din anul 1970.

Să se reprezinte prin dreptunghiuri diagrama corespunzătoare.

(Direcția județeană de statistică, Iași).

6. Situația populației județului Iași între anii 1965—1970 este dată în tabelul 35.

Tabelul 35

Data	Total		Sexe			
			Masculin		Feminin	
	mii persoane	%	mii persoane	%	mii persoane	%
1 iulie 1965	600	100	293	100	307	100
1 iulie 1966	622	103,7	305	104,1	317	103,2
1 iulie 1967	631	105,2	310	105,8	321	104,6
1 iulie 1968	650	108,3	320	109,2	330	107,5
1 iulie 1969	665	110,8	327	111,6	338	110,1
1 iulie 1970	678	113,0	334	114,0	344	112,0

Procentele au fost calculate luîndu-se ca bază populația din anul 1965.

Să se reprezinte diagramele corespunzătoare pentru total și pentru fiecare sex separat (considerîndu-se procentele). Să se tragă concluzii cu privire la creșterea populației din județul Iași.

(Direcția județeană de statistică, Iași).

7. Populația pe grupe de vîrstă și sexe la 1 iulie 1969 din județul Iași este dată în tabelul 36.

Tabelul 36

Grupe de vîrstă	Populație		Masculin		Feminin		% din populație	
	număr	%	număr	%	număr	%	Masculin	Feminin
Total	665128	100	327329	100	337799	100	49,2	50,8
0—5	77017	11,6	39276	12	37741	11,7	51	49
5—10	61474	9,2	31269	9,6	30205	8,9	50,9	49,1
10—15	73312	11,0	37394	11,4	35918	10,6	51	49
15—20	67938	10,2	34671	10,6	33267	9,8	51	49
20—25	50089	7,5	25018	7,6	25071	7,4	49,9	50,1
25—30	45872	6,9	22929	7,0	22943	6,8	50	50
30—35	51491	7,7	26086	8,0	25405	7,5	50,7	49,3
35—40	48240	7,3	23911	7,3	24366	7,2	49,5	50,5
40—45	43240	6,5	21057	6,4	22183	6,6	48,7	51,3
45—50	33605	5,0	15405	4,7	18202	5,4	45,9	54,1
50—55	19918	3,0	8569	2,6	11349	3,4	43	57
55—60	27196	4,1	12338	3,8	14858	4,4	45,3	54,7
60—65	23474	3,5	10956	3,3	12518	3,7	46,7	53,3
65—70	18770	2,8	8612	2,6	10158	3,0	45,9	54,1
70—75	12129	1,8	5384	1,6	6745	2,0	44,4	55,6
75 și peste	11150	1,7	4530	1,4	6620	1,9	40,6	59,4

Se cere:

a) Histograma pentru fiecare serie în parte.

b) Să se reprezinte pe același grafic poligoanele frecvențelor pentru masculin și feminin, folosind procentele din totalul populației din grupa de vîrstă respectivă:

c) Să se interpreteze rezultatele obținute și să se compare cu rezultatele obținute la problema 3 § 2.

(Direcția județeană de statistică, Iași).

8. Pentru punctul de congelare, dat în grade Celsius, la 10 loturi de caprolactamă *) cristalizată tip A, s-au obținut rezultatele din tabelul 37.

Tabelul 37

Nr. crt. lot	Punct de congelare în °C	Nr. crt. lot	Punct de congelare în °C
1	68,8	6	68,95
2	68,8	7	68,8
3	68,8	8	68,8
4	68,95	9	68,8
5	68,9	10	68,85

Se cere:

a) Gruparea datelor.

b) Modul, media, dispersia, abaterea medie pătratică.

c) Poligonul frecvențelor, folosind frecvențele absolute.

d) Să se interpreteze rezultatele obținute, știind că punctul de congelare este un indicator al purității produsului, limita minimă admisă prin STAS-ul 7311/1969 fiind de 68,8°C. Reactivul lactamă pură are punctul de congelare egal cu 69°C.

(Uzina de fibre sintetice, Săvinești).

9. Pentru punctul de congelare, dat în grade Celsius la 10 loturi de caprolactamă cristalizată, tip B, s-au obținut rezultatele din tabelul 38.

Tabelul 38

Nr. crt. lot	Punct de congelare în °C	Nr. crt. lot	Punct de congelare în °C
1	68,7	6	68,7
2	68,75	7	68,75
3	68,75	8	68,75
4	68,65	9	68,75
5	68,75	10	68,75

Se cere:

a) b) c) la fel ca la problema 8;

*) vezi * pagina 147

d) Să se interpreteze rezultatele obținute știind că punctul de congelare este un indicativ al purității produsului, limita minimă admisă prin STAS-ul 7311/69 fiind de 68,6°C.

(Uzina de fibre sintetice, Săvinești).

10. Pentru 50 de inele interioare ale rulmenților de vagoane, extrase la întîmplare dintr-un lot de 800 de rulmenți, s-a efectuat proba de întindere (dilatare) a diametrului interior. Datele obținute, exprimate în mm pe rază sînt cuprinse în tabelul 39.

Tabelul 39

0,090	0,090	0,100	0,090	0,080
0,075	0,100	0,090	0,105	0,095
0,085	0,095	0,085	0,085	0,110
0,090	0,075	0,100	0,090	0,100
0,090	0,085	0,095	0,100	0,075
0,105	0,090	0,095	0,090	0,085
0,105	0,085	0,100	0,105	0,080
0,095	0,100	0,085	0,100	0,100
0,085	0,100	0,095	0,095	0,095
0,090	0,100	0,100	0,100	0,075

Se cere:

a) Să se facă gruparea datelor și să se reprezinte poligonul frecvențelor.

b) Știind că prin STAS-ul 8403/69 se admite o dilatare minimă pe rază de 0,09 mm, să se determine procentul de inele necorespunzătoare din lot.

(Fabrica de Rulmenți, Bîrlad).

11. Pentru datele din tabelul 30, problema **1**, se cere:

a) Să se facă împărțirea în clase, de mărime 1 g cu convenția ca extremitatea dreaptă a fiecărei clase să nu aparțină clasei.

b) Să se completeze tabela obținută la punctul a) cu frecvențe relative, frecvențe cumulate, crescătoare și descrescătoare, absolute și relative și valoarea centrală a clasei.

c) Poligonul frecvențelor, cu frecvențele absolute și pe un același grafic frecvențele relative cumulate crescătoare și descrescătoare.

d) Să se calculeze media și dispersia luîndu-se $x_0 = 249{,}5$.

e) Modul și mediana.

f) Interpretarea rezultatelor obținute.

(Fabrica de uleiuri vegetale „Unirea", Iași).

12. În tabelul 40 este dată variația umidității și a conținutului de ulei la broken de floarea soarelui *) în decurs de o lună prin media pe cele trei

*) Sfărîmături de turte de floarea soarelui care rezultă după procesul de presare și care mai conține încă ulei care se recuperează prin procesul de extracție cu solvenți.

schimburi dintr-o zi. Analizele au fost efectuate pe probele medii ale fiecărui schimb, constituite din probe elementare luate din oră în oră.

Tabelul 40

Nr. crt.	umiditatea %	ulei %	nr. crt.	umiditatea %	ulei %
1	7,5	20,36	16	6,7	20,76
2	7,6	21,47	17	6,3	19,89
3	7,1	20,99	18	6,9	20,59
4	7,3	22,53	19	8,1	20,72
5	8,3	20,40	20	6,7	20,38
6	7,7	19,61	21	6,7	20,50
7	7,2	20,30	22	6,4	19,94
8	7,0	22,81	23	6,8	20,53
9	6,8	20,86	24	7,9	18,60
10	7,5	21,31	25	7,8	20,29
11	7,2	21,15	26	7,8	18,26
12	6,7	20,78	27	8,0	20,70
13	7,8	21,84	28	7,1	20,81
14	6,4	21,63	29	7,3	19,77
15	8,5	21,26	30	7,1	18,07

a) Să se grupeze datele pe clase de variație la umiditate, în clase de lungime 0,5 începînd de la 6, iar la ulei în clase de lungime 0,5, începînd de la 18.

b) Să se reprezinte frecvențele cumulate crescătoare pentru umiditate și pentru ulei și să se interpreteze rezultatele știind că prin norma uzinală se admite conținutul maxim de ulei egal cu 21,6%, iar umiditatea egală cu 7,5%.

(Fabrica de uleiuri vegetale „Unirea", Iași).

13. Datele unei experiențe cu 7 hibrizi dubli (HD) de porumb în 6 repetiții sînt cuprinse în tabelul 41.

Tabelul 41

Hibridul (HD)	Producția de boabe în kg/ha					
	Repetiția					
	I	II	III	IV	V	VI
HD 101 martor *)	4490	4275	4509	4700	4320	4505
HD 97	4170	4250	3975	4275	4150	4125
HD 98	4780	4398	4760	4650	4950	4820
HD 99	4420	4100	4320	4505	4600	4490
HD 100	4870	4765	4480	4650	4950	4895
HD 121	5320	4739	4650	5234	5450	5430
HD 122	5170	4987	4670	5200	5090	5050

*) Soiul consacrat în zona respectivă.

a) Să se clasifice tipurile de hibrizi după producția medie de boabe la ha;

b) Să se exprime în procente media producției în kg/ha pentru fiecare hibrid în raport cu media martorului (considerată ca 100%) și să se reprezinte diagrama corespunzătoare.

(Stațiunea experimentală agricolă, Podul Iloaei, județul Iași).

14. Dintr-un lot de 1000 de bucșe se aleg la întîmplare 10. Măsurînd diametrul lor în mm s-au obținut datele din tabelul 42.

Tabelul 42

Nr. crt.	Diametrul în mm	Nr. crt.	Diametrul în mm.
1	42,92	6	43,00
2	42,99	7	42,97
3	42,97	8	42,96
4	42,99	9	43,00
5	43,03	10	43,02

Conform cu documentația tehnică, diametrul bucșelor trebuie să fie cuprins între 42,95—43,02 mm.

Se cere:

a) Procentul de bucșe necorespunzătoare.

b) Media și dispersia și să se interpreteze rezultatele obținute.

(Uzina de reparații pentru agricultură, Iași).

15. Pentru analiza conținutului în cupru a unui minereu cuprifer s-a colectat un eșantion din care s-au făcut 6 analize. Rezultatele obținute sînt date în tabelul 43.

Tabelul 43

Nr. crt. al analizei	% cupru găsit
1	4,28
2	4,21
3	4,30
4	4,36
5	4,26
6	4,33

Să se calculeze media și dispersia și să se interpreteze rezultatele găsite.

(Catedra de chimie Analitică, Facultatea de chimie, Iași).

16. Dintr-un lot de flacoane de streptomicină s-au cîntărit 20 flacoane luate la întîmplare, obținîndu-se tabelul 44 pentru doza de flacon în grame.

Tabelul 44

1,3512	1,4270	1,3088	1,3324
1,3332	1,3032	1,3908	1,3298
1,3510	1,3124	1,3526	1,3602
1,3300	1,3970	1,3190	1,3462
1,3720	1,3052	1,3340	1,3652

În Farmacopeea română, ed. VIII, se admite ca doză de flacon $1{,}4 \pm 10\%$. Să se constate dacă flacoanele sînt corespunzătoare, să se calculeze media și dispersia și să se interpreteze rezultatele obținute.

(Fabrica de antibiotice, Iași)

17. Dintr-o șarjă de penicilină G-Kaliu s-au făcut zece probe pentru determinarea activității în ui/mg *); datele obținute sînt cuprinse în tabelul 45.

Tabelul 45

Nr. crt. al probei	activitatea în ui/mg	nr. crt. al probei	activitatea în ui/mg
1	1575	6	1572
2	1576	7	1565
3	1568	8	1567
4	1565	9	1565
5	1575	10	1561

Să se calculeze media și abaterea medie pătratică. Să se tragă concluzii asupra activității întregii șarje, știind că în Farmacopeea română ed. VIII se admite ca activitate minimă 1500 ui/mg.

(Fabrica de antibiotice, Iași)

*) Unități internaționale pe mg.

18. În urma analizelor efectuate pentru fire de urzeală cu finețea Nm 50 *) din bumbac 100%, prelucrate la o mașină de filat în timpul unui schimb, s-au obținut datele din tabelul 46.

Tabelul 46

Nr. crt. al probei	Finețe (Nm)	Sarcină de rupere (g.f)**	Torsiune (răsuciturii/m)
1	49,8	276	892
2	53,7	324	896
3	51,6	288	960
4	52,5	285	880
5	52,0	258	840
6	50,2	254	896
7	48,0	252	900
8	51,0	210	924
9	48,1	228	940
10	49,8	214	968
11	47,8	245	996
12	51,3	238	872
13	51,8	238	896
14	50,0	232	904
15	50,2	262	890
16	52,5	220	896
17	49,0	234	900
18	50,0	280	824
19	49,2	268	848
20	50,6	254	850

Se cere pentru fiecare serie media și mediana.

Să se verifice dacă produsul satisface condițiile cerute de STAS-ul 287—67 în ceea ce privește rezistența la rupere, știind că limitele inferioare standardizate pe categorii de calitate sînt următoarele:

superior	246 g.f.
bun	234 g.f.
normal	218 g.f.
sub normal	198 g.f.

(Fabrica „Țesătura", Iași — secția Filatură).

*) Numărul metric (Nm) este unitatea de măsură pentru finețea firelor, fiind dat de raportul între lungimea firului în metri și greutatea firului în grame; pentru un fir cu finețea Nm 50, o lungime de 50 metri cîntărește 1 gram.

**) g.f. = grame forță.

19. Numărul g de grupuri de pete solare și numărul f de pete solare pe zile, în cursul rotației 1525 a soarelui *), din perioada 2—28 septembrie 1967 sînt cuprinse în tabelul 47.

Tabelul 47

Data	g	f
2 sept. 1967	7	87
3 sept. 1967	9	122
4 sept. 1967	11	73
5 sept. 1967	13	122
6 sept. 1967	11	63
8 sept. 1967	9	44
9 sept. 1967	11	62
10 sept. 1967	7	55
11 sept. 1967	5	59
14 sept. 1967	6	26
15 sept. 1967	5	30
19 sept. 1967	7	42
21 sept. 1967	8	47
22 sept. 1967	7	57
24 sept. 1967	4	28
25 sept. 1967	5	23
26 sept. 1967	3	24
27 sept. 1967	4	24
28 sept. 1967	6	32

În zilele lipsă din tabelul 47 nu s-au putut efectua observații din cauza condițiilor atmosferice nefavorabile.

Să se calculeze media numărului lui Wolf, $w = 10g + f$, număr ce caracterizează activitatea solară.

(Observatorul astronomic, Iași).

20. Datele obținute prin analizarea rezistenței betoanelor marca B 300**), livrate de o stație de betoane sînt cuprinse în tabelul 48.

---

*) Evidența rotațiilor soarelui se ține din timpul lui Carrington Richard Christopher (1828—1875) astronom american. Rotația care a început la 9 noiembrie 1853 se consideră prima. Perioada de rotație este de 25,38 zile mijlocii.

**) vezi * pagina 157.

În STAS-ul 1275-62 se cere să fie îndeplinită condiția

$$R^k \geqslant 0{,}7\ R_b,$$

unde R^k, rezistența specifică, este dată de $R^k = \bar{x} - t\sigma$, t fiind un coeficient stabilit prin același STAS și egal în acest caz cu 1,812, iar R_b este marca betonului, deci $R_b = 300$ (în acest caz).

Tabelul 48

Nr crt. al probei	Rezistența în kg forță/cm²
1	255
2	297
3	307
4	303
5	352
6	333
7	305
8	323
9	352
10	218
11	266
12	232

Să se verifice dacă betoanele considerate satisfac în ceea ce privește rezistența, condiția cerută de STAS.

(Trustul de construcții, Iași).

21. Datele obținute prin analizarea rezistenței betoanelor marca B 250 livrate de o stație de betoane sînt cuprinse în tabelul 49.

Tabelul 49

Nr. crt. al probei	Rezistența în kg forță/cm²
1	295
2	235
3	225
4	178
5	208
6	228

Să se verifice dacă $R^k \geqslant 0{,}7\ R_b$ (vezi enunțul problemei **20**); în acest caz $R_b = 250$, iar $t = 1{,}476$.

(Trustul de construcții, Iași)

22. Pentru produsul finit, fir relon 60 denieri *) 20 filamente con s.c.**) s-au obținut în urma analizelor de laborator datele din tabelul 50.

Tabelul 50

Titlul în den	Tenacitatea în g/den	Alungire la rupere %	Torsiune/m	Contracție la fierbere %
59	4,9	31,9	459	6,0
58,5	4,8	32,3	476	6,2
57,3	5,0	34,8	470	5,9
59,1	5,2	35,3	480	6,4
58,7	4,8	34,3	464	5,8
60,2	4,5	35,3	473	3,4
59,5	4,7	31,3	472	5,4
59,9	4,6	32,8	477	4,9
58,6	5,1	31,3	467	5,2
57,9	5,0	29,3	457	5,2
58,7	5,0	34,3	484	5,2
59,5	5,0	32,8	459	5,0
59,1	5,3	31,8	450	4,7
60,8	5,5	33,3	475	4,8
57,9	5,0	34,3	475	4,7

Prin N.I.I. 4355/69 sînt admise următoarele limite, corespunzător cu ordinea coloanelor din tabela 50: 57—63 den; minimum 45 g/den; 25—35%; 426—494 t/m; 3—6,5%.

Se cere media, dispersia și abaterea medie pătratică pentru fiecare serie (recomandăm folosirea metodei zeroului fals) și să se interpreteze rezultatele obținute.

(Uzina de fibre sintetice, Săvinești).

23. Pentru tabelele obținute în problema 2 se cere:

a) Media pentru fiecare serie în parte, modul și mediana.

b) Știind că analizele din tabela 31 reprezintă cele mai semnificative analize care se cer la livrarea acestui produs și că prin NII 390—67 se cer pentru aciditate maximum 9 grade, pentru conținut în materii grase minimum 82,5%, pentru umiditate maximum 16,5% iar pentru punctul de topire prin alunecare 31—35°, să se interpreteze rezultatele obținute.

(Fabrica de ulei și produse derivate „Unirea", Iași).

*) Denier — unitate de măsură pentru finețe (9 000 m cîntărește 1 g) se prescurtează cu den.

**) Forma de prezentare a produsului, semitratare contractat.

24. Prin analiza la microscop a unor frotiuri sangvine colectate de la două serii de fete de 12 și 14 ani din orașul Iași, s-a stabilit numărul apendicelor nucleari *), în vederea comparării variabilității acestor formațiuni în funcție de vîrstă. Rezultatele obținute sînt date în tabelul 51.

Tabelul 51

Nr. apendicelor nucleari	Nr. fete 12 ani	Nr. fete 14 ani
0	18	17
1	22	22
2	26	18
3	8	18
4	5	8
5	5	2
6	3	2
7	1	2
8	1	0

a) Să se reprezinte histograma pentru fiecare serie în parte.

b) Din compararea valorilor medii pentru fiecare serie, să se tragă concluzii asupra fenomenului urmărit.

(Centrul de cercetări biologice, Iași).

25. Datele obținute prin măsurarea staturii, a lungimii trunchiului și a lungimii picioarelor la populația adultă, bărbați, din comuna Giulești, județul Maramureș, sînt cuprinse în tabelul 52

*) Formațiune cu aspect de bețișor de tobă (drum stick) întîlnită pe nucleele globulelor albe neutrofile.

Tabelul 52

Nr. crt.	statura în cm x_i	lungimea trunchiului în cm y_i	lungimea picioarelor în cm z_i	Nr. crt.	statura în cm x_i	lungimea trunchiului în cm y_i	lungimea picioarelor în cm z_i
1	153	43	71	48	165	46	77
2	153	43	71	49	165	46	77
3	153	46	74	50	165	46	77
4	156	43	71	51	165	46	77
5	156	43	71	52	165	46	77
6	156	46	74	53	165	49	77
7	156	46	77	54	165	49	77
8	156	46	77	55	165	49	77
9	156	46	71	56	165	49	77
10	159	46	71	57	165	49	77
11	159	46	71	58	165	49	80
12	159	46	71	59	165	49	80
13	159	46	74	60	165	49	80
14	159	46	74	61	165	52	80
15	159	46	74	62	168	43	74
16	159	46	74	63	168	46	77
17	159	46	74	64	168	46	77
18	159	46	74	65	168	46	80
19	159	46	74	66	168	49	80
20	159	49	74	67	168	49	80
21	159	49	74	68	168	49	80
22	159	49	77	69	168	49	80
23	159	49	77	70	168	49	80
24	159	49	77	71	168	49	80
25	162	43	71	72	168	49	80
26	162	43	71	73	168	49	80
27	162	46	74	74	168	49	80
28	162	46	74	75	168	49	80
29	162	46	74	76	168	49	83
30	162	46	74	77	168	49	86
31	162	46	74	78	171	46	80
32	162	46	74	79	171	46	80
33	162	46	74	80	171	49	80
34	162	46	77	81	171	49	80
35	162	46	77	82	171	49	83
36	162	49	77	83	171	49	83
37	162	49	77	84	171	52	83
38	162	49	77	85	171	52	84
39	162	49	77	86	174	49	83
40	162	49	77	87	174	49	83
41	162	49	80	88	174	49	83
42	162	52	80	89	174	52	86
43	165	43	74	90	174	52	86
44	165	46	74	91	177	49	86
45	165	46	77	92	180	46	86
46	165	46	77	93	180	52	86
47	165	46	77				

Se cere:

a) Tabelele cu dublă intrare pentru:

— statură și lungimea trunchiului;

— statură și lungimea picioarelor.

b) Să se reprezinte separat punctele (x_i, y_i) și punctele (x_i, z_i) și să se interpreteze rezultatele obținute.

(Centrul de cercetări biologice, Iași).

26. Pentru datele din problema **14** § 2 să se ajusteze dreapta prin metoda mediilor discontinue, considerînd:

a) primele trei puncte și ultimele patru;

b) primele patru puncte și ultimele trei.

27. Să se rezolve problema **16** din § 2, ajustînd cele două drepte prin metoda celor mai mici pătrate.

28. Măsurîndu-se greutatea și talia la 10 copii în vîrstă de 12—14 ani s-au obținut datele din tabelul 53.

Tabelul 53

Nr. crt.	Greutatea în kg x_i	Talia în cm y_i
1	32	132
2	33	135
3	34	139
4	36	144
5	40	142
6	41	147
7	45	154
8	47	153
9	49	156
10	52	160

Se cere:

a) Să se reprezinte punctele (x_i, y_i).

b) Să se ajusteze dreapta în jurul căreia se grupează punctele (x_i, y_i) prin metoda mediilor discontinue.

(Centrul de cercetări biologice, Iași).

§ 4. Indicații și răspunsuri

1.

247	2	249,6	1
247,6	1	249,7	1
247,7	1	249,8	4
247,8	2	249,9	17
248	4	250	19
248,7	2	250,1	7
248,8	4	250,2	1
248,9	3	251	4
249	6	251,2	1

2. Aciditatea

x_i	n_i
1,20	4
1,21	22
1,41	4

Conținut materii grase:

x_i	n_i
82,70	1
82,90	2
83,05	1
83,25	1
83,30	5
83,35	2
83,40	2
83,45	2
83,50	1
83,60	1
83,65	2
83,70	3
83,75	1
83,95	2
84	2
84,25	1
84,55	1

Umiditatea

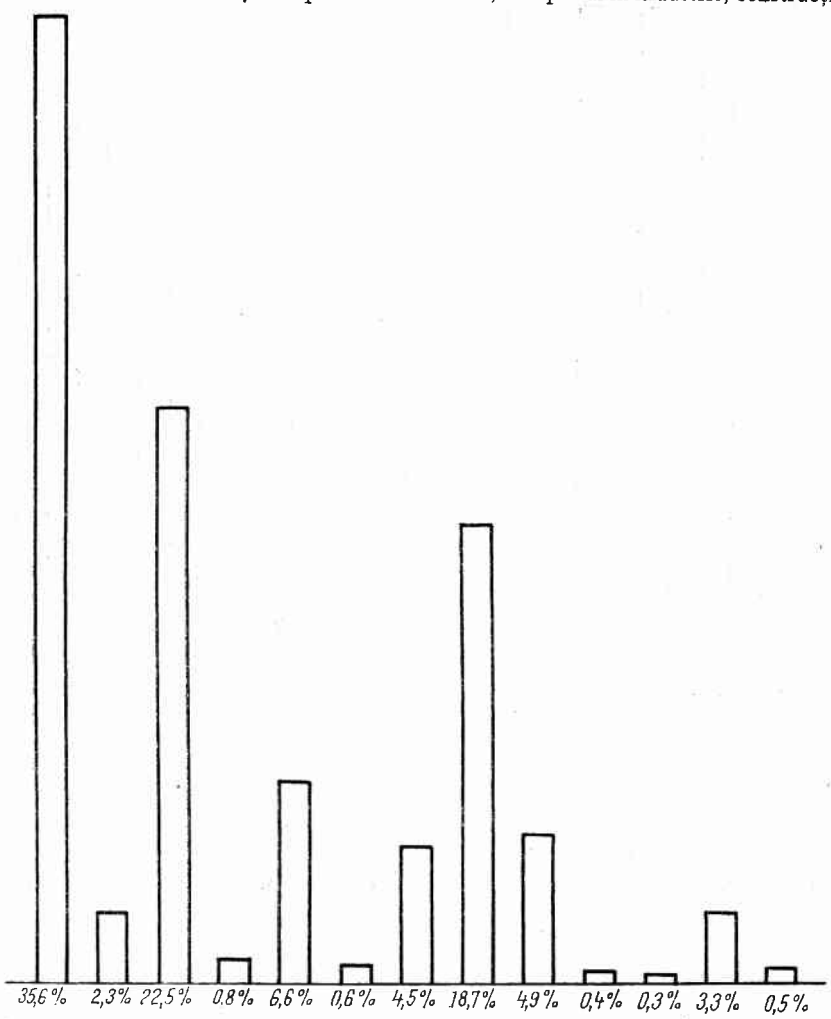
x_i	n_i
15,35	1
15,65	2
15,70	1
15,80	5
15,90	2
15,95	1
16,00	3
16,05	1
16,15	4
16,20	1
16,25	1
16,30	1
16,40	1
16,45	4
16,50	2

Punct de topire prin alunecare

x_i	n_i
32	1
33	24
34	5

3. Se obține figura 44.

Se constată că față de anul 1965, investițiile total județ au crescut în anul 1969 cu 161%; de asemenea se constată creșterea pe fiecare ramură, în special în industrie, construcții, trans



Lungimile coloanelor 1, 3, 8 (de la stînga) au fost reduse.

Fig. 44

porturi, telecomunicații 460%, învățămînt 180%, cultură și artă 925%, știință și deservire științifică 233%, ocrotirea sănătății 152%.

În anul 1965 ponderea investițiilor era tot în industrie, agricultură și gospodărie comunală.

4. Se obține diagrama din figura 45.

Saltul din anul 1966 se explică prin conectarea în acel an a județului Iași la sistemul energetic național.

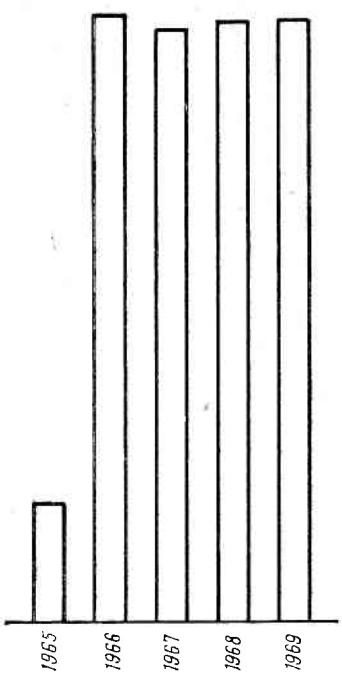


Fig. 45

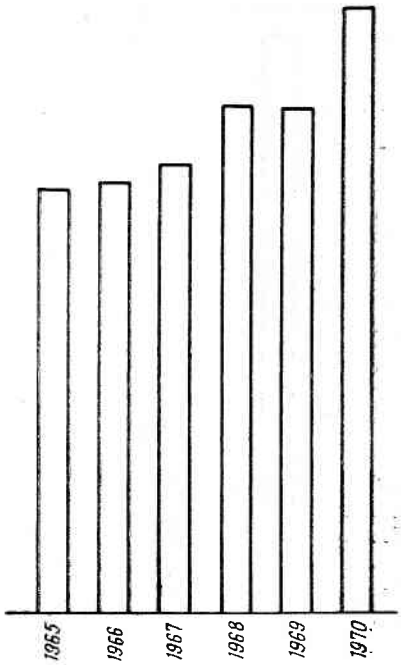


Fig. 46

5. Se obține diagrama din figura 46.

6. Se obțin corespunzător (total, masculin, feminin) diagramele din figurile 47—49.

Se constată că atît pe total, cît și pentru fiecare sex în parte populația județului Iași, în perioada considerată, crește continuu de la an la an.

7. a) Se obțin corespunzător figurile 50—52.

b) Se obține figura 53.

c) Aceleași rezultate ca la problema 3 § 2. Se observă că față de anul 1969, în anul 1970 populația a crescut atît ca număr total cît și pe fiecare sex în parte.

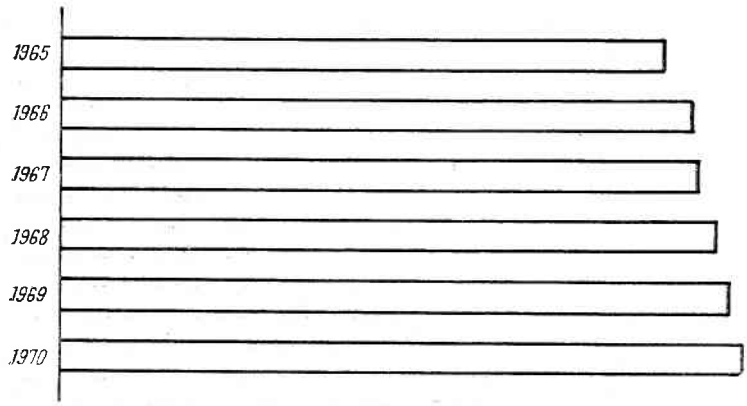


Fig. 47

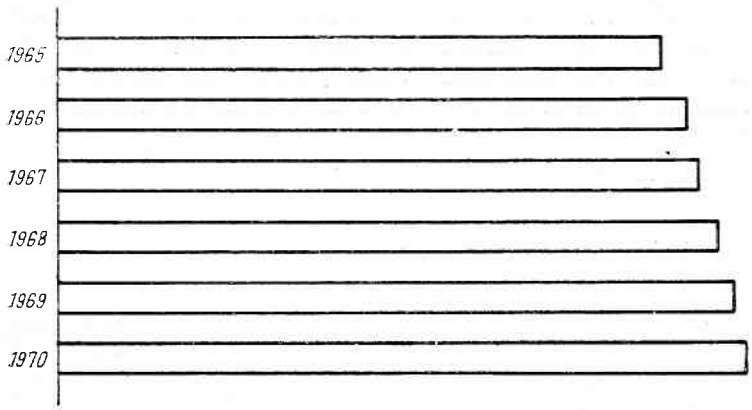


Fig. 48

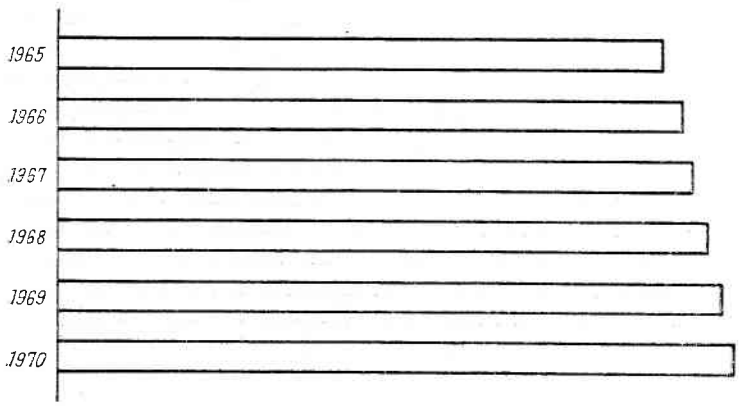


Fig. 49

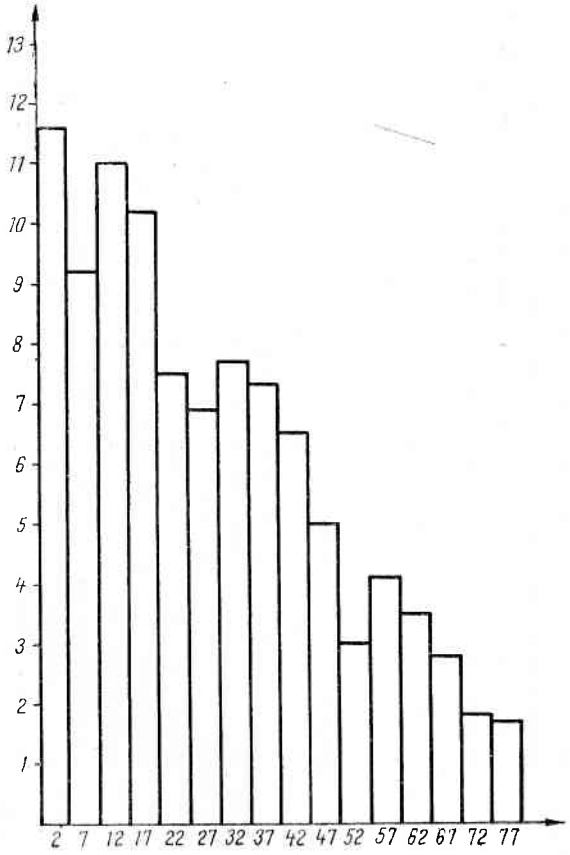

13
12
11
10
9
8
7
6
5
4
3
2
1
2 7 12 17 22 27 32 37 42 47 52 57 62 67 72 77

Fig. 50

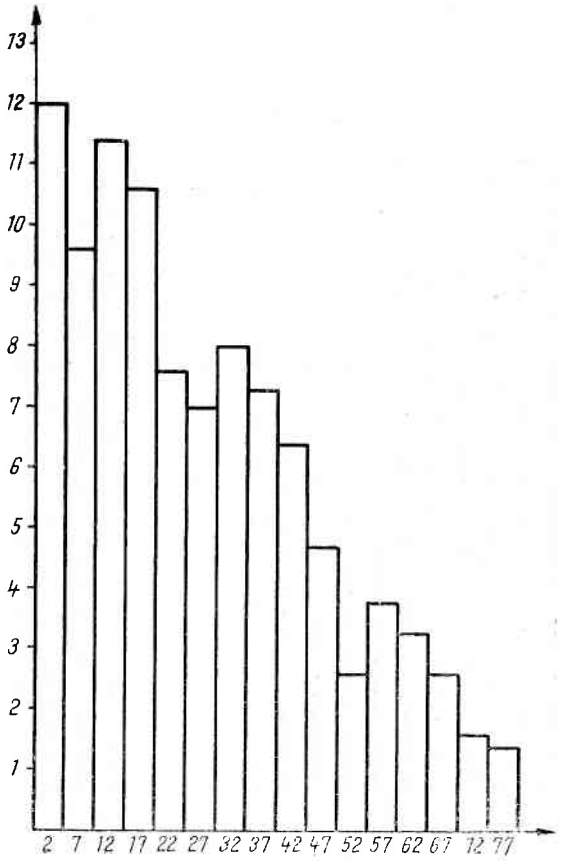

13
12
11
10
9
8
7
6
5
4
3
2
1
2 7 12 17 22 27 32 37 42 47 52 57 62 67 72 77

Fig. 51

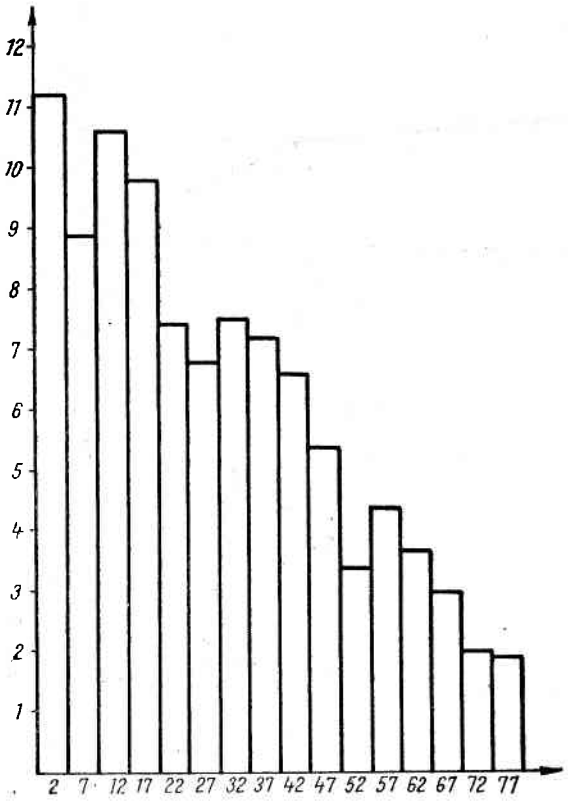

12
11
10
9
8
7
6
5
4
3
2
1
2 7 12 17 22 27 32 37 42 47 52 57 62 67 72 77

Fig. 52

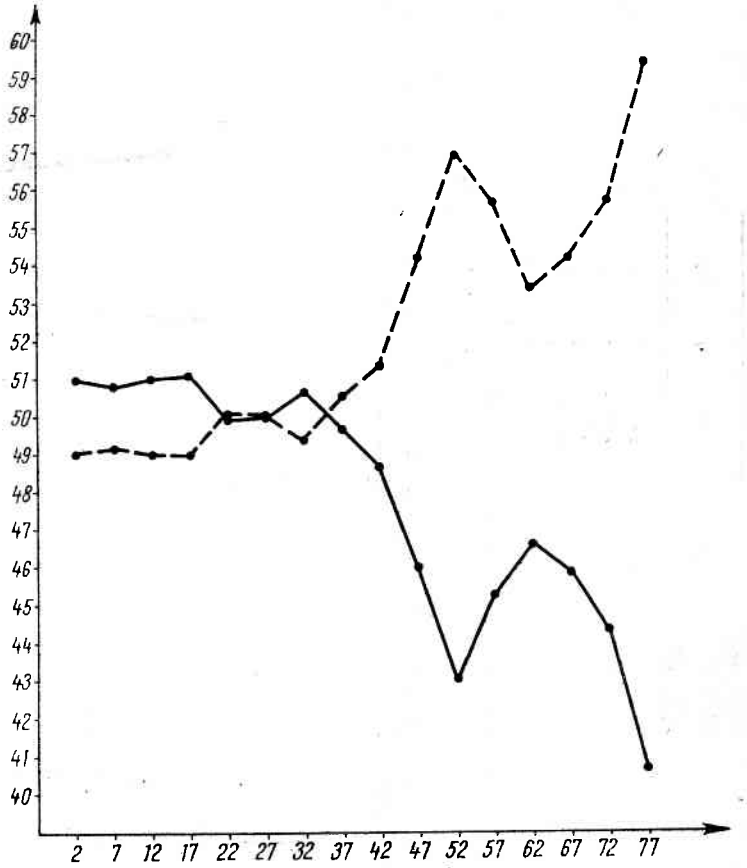

60
59
58
57
56
55
54
53
52
51
50
49
48
47
46
45
44
43
42
41
40
2 7 12 17 22 27 32 37 42 47 52 57 62 67 72 77

Fig. 53

8. a)

68,8	IIII I
68,85	I
68,9	I
68,95	II

x_i	n_i
68,8	6
68,85	1
68,9	1
68,95	2

b) $M = 68{,}8$; $\bar{x} = 68{,}84$; $\sigma^2 = 0{,}003$; $\sigma = 0{,}06$.

c) Se obține fig. 54.

d) Limita minimă admisă prin STAS este cel puțin atinsă; la unele loturi punctul de congelare fiind foarte aproape de punctul de congelare al reactivului (lotul 4 și 6). Modul coincide

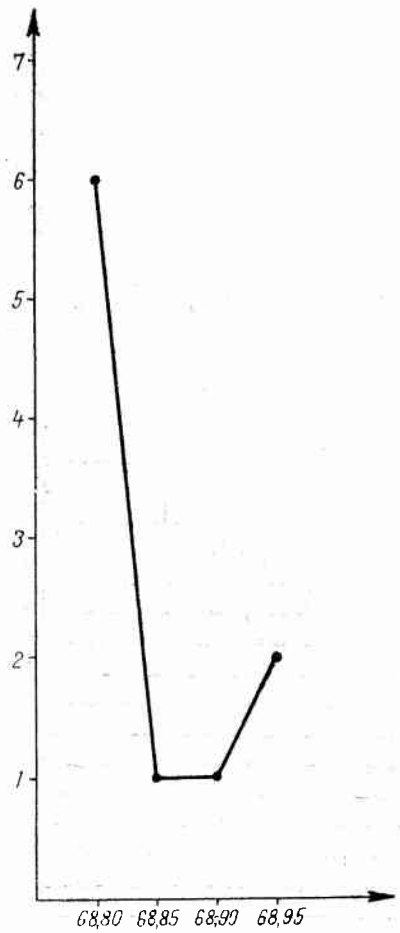


Fig. 54

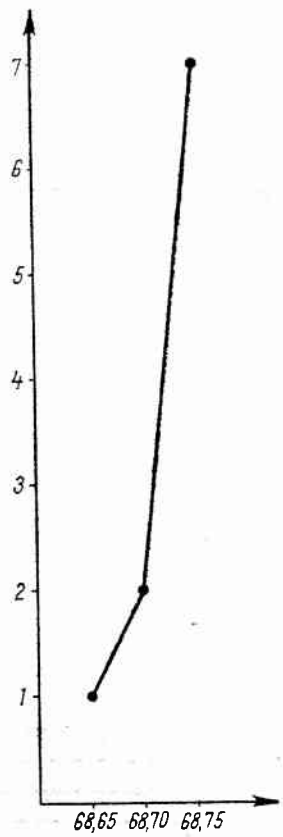


Fig. 55

cu limita admisă iar media depășește puțin această limită. Dispersia fiind foarte mică, produsul are un punct de congelare care satisface condițiile cerute de STAS.

9. a)

68,65 I
68,7 II
68,75 IIII II

x_i	n_i
68,65	1
68,7	2
68,75	7

b) $M = 68{,}75$; $\bar{x} = 68{,}73$; $\sigma^2 = 0{,}001$; $\sigma = 0{,}033$.

c) Se obține figura 55.

d) Limita minimă admisă prin STAS este depășită la toate loturile. Atît modul cît și media se apropie de limita minimă admisă la tipul A (vezi problema 8). Dispersia fiind foarte mică, produsul are un punct de congelare foarte apropiat de 68,73, ceea ce indică un înalt grad de puritate.

10. a)

0,075	4
0,080	2
0,085	8
0,090	10
0,095	8
0,100	13
0,105	4
0,110	1

Poligonul frecvențelor este dat de figura 56.

b) 28%.

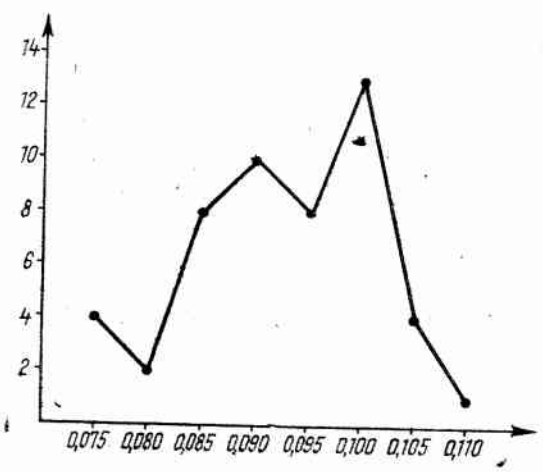


Fig. 56

11. a)

clase	n_i
247—248	6
248—249	13
249—250	29
250—251	27
251—252	5

b)

clase	n_i	f_i	$n_i \uparrow$	$n_i \downarrow$	$f_i \uparrow$	$f_i \downarrow$	valoarea centrală a clasei
247—248	6	0,075	6	80	0,075	1	247,5
248—249	13	0,162	19	74	0,237	0,925	248,5
249—250	29	0,362	48	61	0,599	0,763	249,5
250—251	27	0,338	75	32	0,937	0,401	250,5
251—252	5	0,063	80	5	1	0,063	251,5

c) Pentru poligonul frecvențelor se obține figura 57, iar pentru frecvențe cumulate figura 58.

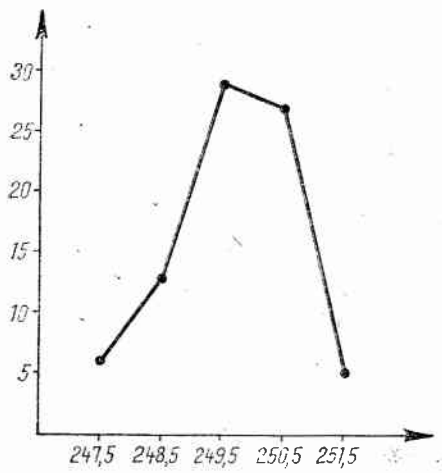


Fig. 57

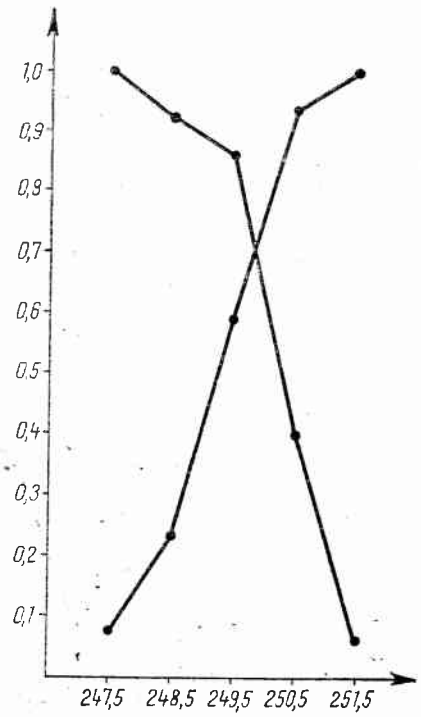


Fig. 58

d)

x_i	f_i	$x_i - x_0$	$f_i(x_i - x_0)$	$(x_i - x_0)^2$	$f_i(x_i - x_0)^2$	$x_i - \bar{x}$	$(x_i - \bar{x})^2$	$f_i(x_i - \bar{x})^2$
247,5	0,075	−2	−0,150	4	0,300	−2,15	4,62	0,346
248,5	0,162	−1	−0,162	1	0,162	−1,15	1,32	0,213
249,5	0,362	0	0,	0	0	−0,15	0,02	0,007
250,5	0,338	1	0,338	1	0,338	0,85	0,72	0,243
251,5	0,063	2	0,126	4	0,252	1,85	3,32	0,209
					1,052			1,018

$\bar{x} = 249{,}65 \quad \sigma^2 = 1{,}018 \simeq 1{,}052 - 0{,}0225$

e) $M = 249{,}5,\ Me = 249 + (40 - 19)\dfrac{250 - 249}{29} = 249{,}72$

f) În tot decursul schimbului mașina a preambalat pachetele cu un gramaj în limitele admise de norma internă.

12. a)

6 — 6,5	3	18—18,5	2
6,5 — 7	7	18,5—19	1
7 — 7,5	8	19,5—20	4
7,5 — 8	8	20—20,5	5
8 — 8,5	2	20,5—21	10
8,5 — 9	2	21—21,5	4
		21,5—22	2
		22,5—23	2

b) Se obține figura 59 și corespunzător figura 10.

Se constată că în ceea ce privește conținutul la % în ulei norma uzinală este îndeplinită obținîndu-se direct prin presare cantități mai mari de ulei decît cantitatea minimă admisă de norma uzinală, iar umiditatea la % ia valori care se grupează în jurul valorii admise.

13. a) Se obține tabelul 54.

Tabelul 54

Nr. crt.	Hibridul (HD)	Media	%
1	HD 121	5137,16	114,79
2	HD 122	5027,83	112,54
3	HD 100	4768,33	106,76
4	HD 98	4726,33	103,82
5	HD 101 (Martor)	4466,50	100
6	HD 99	4405,83	98,64
7	HD 97	4157,50	93,08

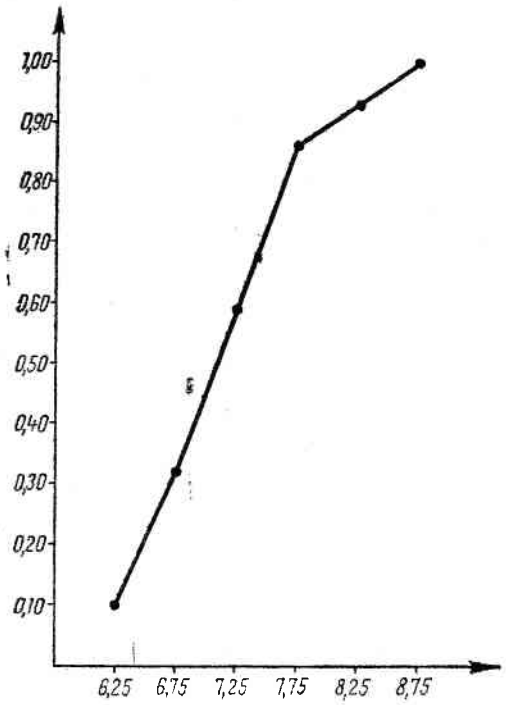

1,00
0,90
0,80
0,70
0,60
0,50
0,40
0,30
0,20
0,10
6,25
6,75
7,25
7,75
8,25
8,75

Fig. 59

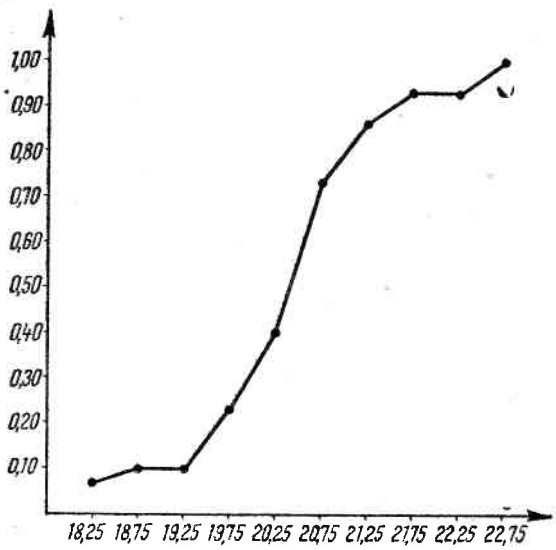
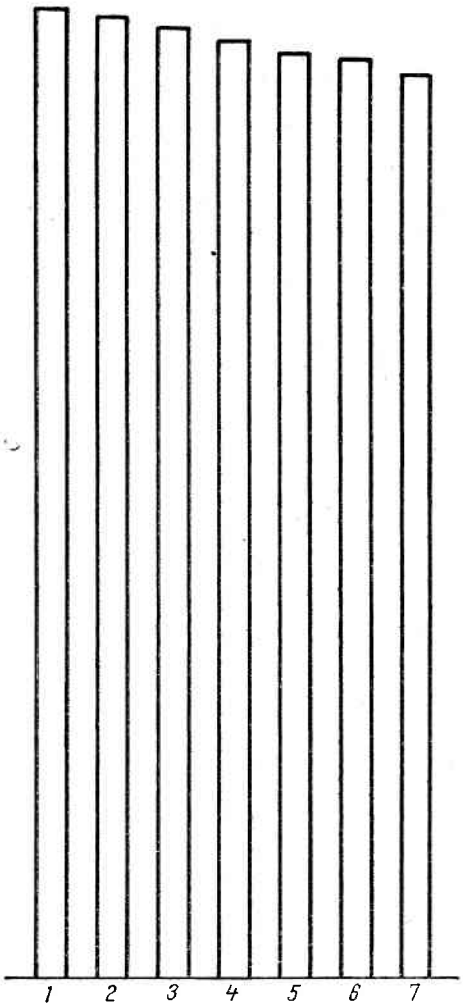

1,00
0,90
0,80
0,70
0,60
0,50
0,40
0,30
0,20
0,10
18,25
18,75
19,25
19,75
20,25
20,75
21,25
21,75
22,25
22,75

Fig. 60

Producția medie maximă în kg/ha o dă hibridul 121. *)
b) Se obține diagrama din figura 61.



Lungimile coloanelor au fost reduse.

Fig. 61

14. a) 10%.

b) $\bar{x} = 42{,}99$, $\sigma^2 = 0{,}031$.

Dispersia fiind foarte mică, diametrele bucșelor din lot au valori ce se grupează strîns în jurul numărului 42,99.

---

*) Luîndu-se în considerație și rezultatele acestei experiențe, HD 121 a fost răspîndit în zonă.

15. $\bar{x} = 4{,}29$; $\sigma^2 = 0{,}0023$. Dispersia fiind foarte mică conținutul în cupru al minereului este de aproximativ 4,29%.

16. Doza de flacon trebuie să fie între 1,260—1,540.

Se constată că toate flacoanele sînt corespunzătoare;

$\bar{x} = 1{,}355$, $\sigma^2 = 0{,}032$, deci dispersia fiind foarte mică, doza pentru flacoanele din lot este de aproximativ 1,355 g.

17. $\bar{x} = 1568{,}9$; $\sigma = 4{,}96$. Pentru fiecare probă, activitatea este superioară celei minime cerute, abaterea medie pătratică fiind mică, activitatea întregii șarje este de aproximativ 1568,9 ui/mg.

18. Finețe: $\bar{x} = 50{,}4$; $Me = 50{,}2$.

Sarcina de rupere: $\bar{x} = 253$; $Me = 254$.

Torsiune: $\bar{x} = 898{,}6$; $Me = 896$.

În ceea ce privește sarcina de rupere, produsul satisface în medie condițiile cerute de STAS pentru o calitate superioară.

19. Pentru numărul lui Wolf se obțin următoarele valori:

157	80
212	112
183	127
252	127
173	68
134	73
172	54
125	64
109	92
86	

Avem $\overline{w} = \dfrac{2400}{19} = 126{,}21$.

20. $\bar{x} = 295$, $\sigma = 43$, deci $R^k = 295 - 1{,}812 \cdot 43 \simeq 217 > 210 = 0{,}7 \cdot 300 = 0{,}7\, R_b$ deci condiția cerută prin STAS este satisfăcută.

21. $R^k = \bar{x} - t\sigma = 227 - 1{,}476 \cdot 250 = 170$; $0{,}7\, R_b = 0{,}7 \cdot 250 = 175$.

Deci $R^k < 0{,}7 R_b$. Diferența dintre R^k și $0{,}7\, R_b$ este mică, iar rezultatul neconcludent întrucît numărul de probe este foarte mic.

22. Pentru seriile din tabela 50 în ordinea coloanelor se obține:

$\bar{x} = 58{,}98$;	$\sigma^2 = 0{,}682$	$\sigma = 0{,}82$
$\bar{x} = 4{,}95$;	$\sigma^2 = 0{,}066$	$\sigma = 0{,}081$
$\bar{x} = 33$;	$\sigma^2 = 2{,}78$	$\sigma = 1{,}66$
$\bar{x} = 469{,}2$;	$\sigma^2 = 86{,}03$	$\sigma = 9{,}27$
$\bar{x} = 5{,}25$;	$\sigma^2 = 7{,}93$	$\sigma = 2{,}81$

Produsul finit cercetat satisface toate condițiile cerute de norma internă, deoarece mediile în toate cazurile satisfac condițiile, iar abaterile medii pătratice sînt mici.

23. a) Aciditatea $\bar{x} = 1{,}25$; $M = 1{,}21$; $Me = 1{,}21$.

Conținut de materii grase: $\bar{x} = 83{,}62$; $M = 83{,}30$; $Me = 83{,}45$.

Umiditate: $\bar{x} = 16{,}05$; $M = 15{,}80$; $Me = 16{,}02$.

Punct de topire prin alunecare: $\bar{x} = 33{,}1$; $M = 33$; $Me = 33{,}58$.

b) Atît toate probele cît și valorile medii și modul satisfac condițiile cerute de norma internă. Produsul este de calitate superioară în ce privește consistența (aciditatea, materii grase, umiditatea) iar prin punctul de topire se asigură o asimilare ușoară în organism și menținerea formei comerciale.

24. a) Pentru vîrsta de 12 ani se obține figura 62, iar pentru 14 ani figura 63.

b) Corespunzător pentru vîrste, mediile sînt egale cu 2,20 și 2,27, deci fiind foarte apropiate indică independența și nu variabilitatea față de vîrstă.

25. a)

Tabelul 55

Statura cm / lung. trunch. cm	153	156	159	162	165	168	171	174	177	180	Total
43	2	2		2	1	1					8
46	1	4	10	9	9	3	2			1	39
49			5	6	8	12	4	3	1		39
52				1	1		2	2		1	7
Total	3	6	15	18	19	16	8	5	1	2	93

Tabelul 56

Statura cm / lung. picioare cm	153	156	159	162	165	168	171	174	177	180	Total
71	2	2	3	2							9
74	1	1	9	7	2	1					21
77		2	3	7	13	2					27
80		1		2	4	11	4				22
83						1	4	3			8
86						1		2	1	2	6
Total	3	6	15	18	19	16	8	5	1	2	93

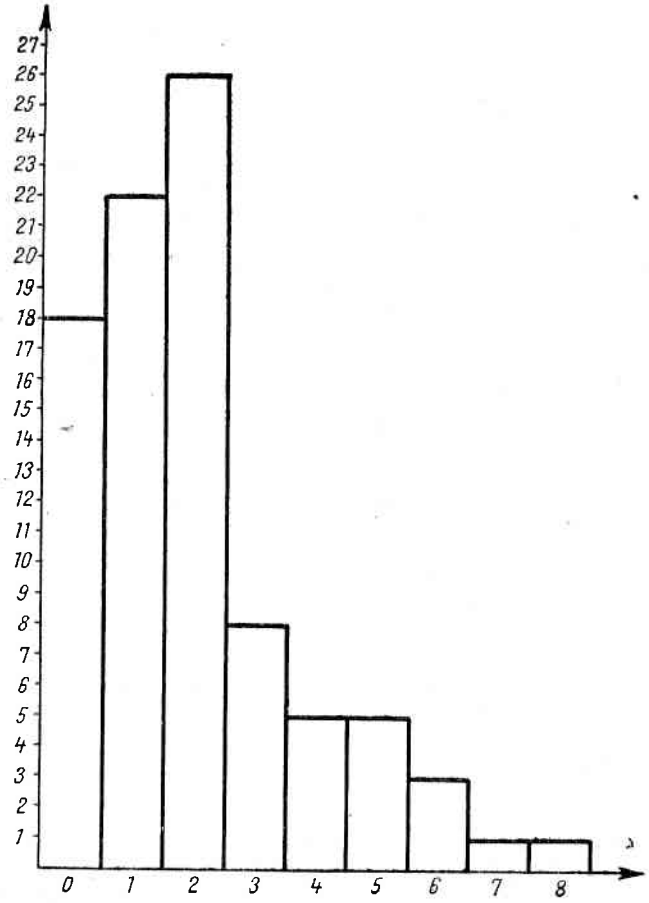

27
26
25
24
23
22
21
20
19
18
17
16
15
14
13
12
11
10
9
8
7
6
5
4
3
2
1
0 1 2 3 4 5 6 7 8

Fig. 62

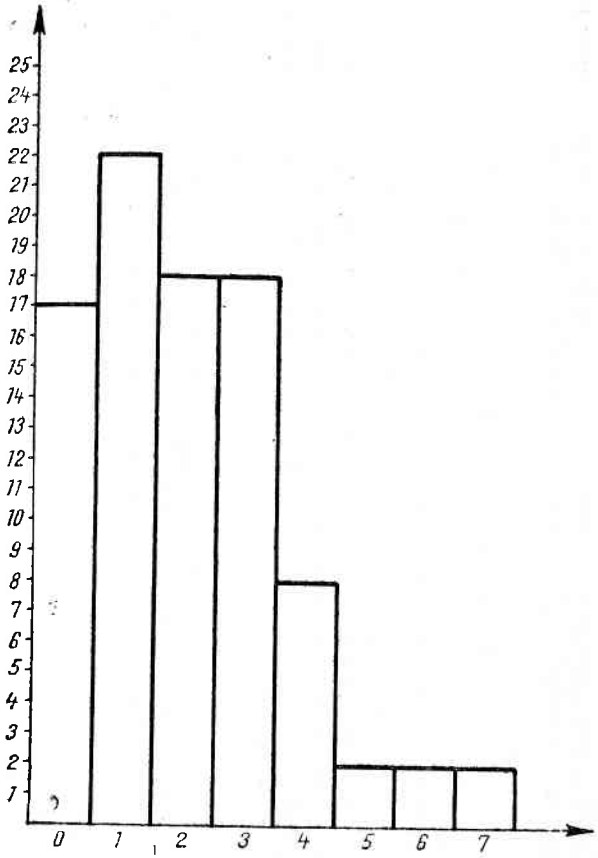

25
24
23
22
21
20
19
18
17
16
15
14
13
12
11
10
9
8
7
6
5
4
3
2
1
0 1 2 3 4 5 6 7

Fig. 63

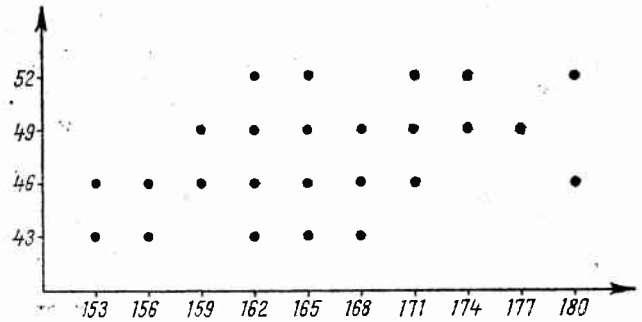


Fig. 64

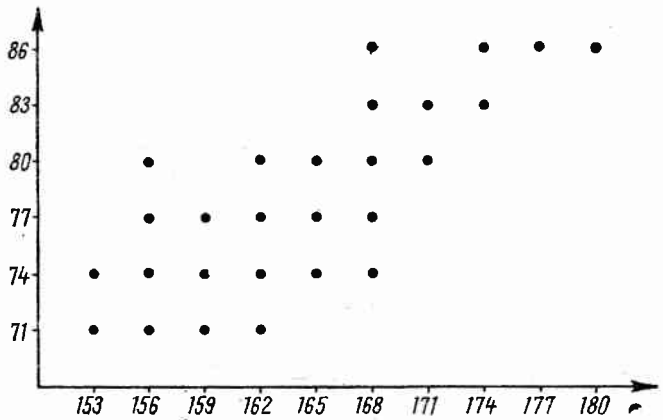


Fig. 65

b) Se obțin corespunzător graficele din figurile 64 și 65. Se constată că dependența dintre statură și lungimea picioarelor este mai puternică decît dependența dintre statură și lungimea trunchiului, în primul caz punctele grupîndu-se mai strîns în jurul unei drepte.

26. a) $y = 0{,}5x + 24$.

b) $y = 0{,}52x + 21{,}05$.

Se constată că dreapta obținută depinde esențial de gruparea punctelor.

27. Pentru dreapta ajustată de primele 4 puncte se obține ecuația

$$y = -1{,}1x + 5{,}11$$

iar pentru dreapta ajustată de ultimele 4 puncte, ecuația

$$y = 5{,}1x - 3{\cdot}03.$$

Pentru abscisa punctului de intersecție se obține $x = 1{,}3$ deci concentrația soluției este de aproximativ 1,3 echivalenți.

28. a) Se obține figura 66.

b) Grupînd primele cinci puncte și ultimele cinci puncte se obțin punctele medii $A(35; 138{,}4)$ și $B(46{,}8; 154)$, iar dreapta care trece prin cele două puncte are ecuația $y = 1{,}3x + 92{,}1$.

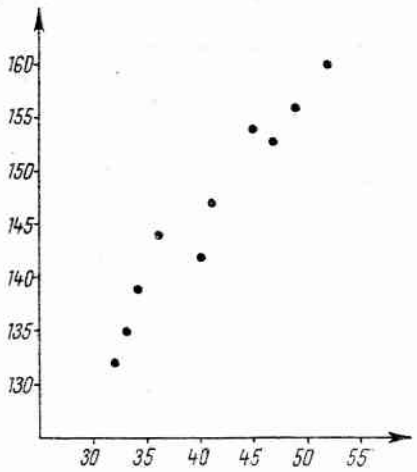


Fig. 66

Anexa 1

Probleme date la concursuri de matematică (Olimpiade)

Etapa locală, februarie 1969

1. *Într-o clasă sînt* 24 *elevi și* 2 *eleve, avînd fiecare cîte o fișă. Să se calculeze numărul maxim de fișe ce trebuie extrase astfel ca probabilitatea ca între fișele extrase să obținem cel puțin fișa unei eleve, să fie mai mică decît* 0,6.

Rezolvare. Se aplică schema bilei neîntoarse. Evenimentul ca între k fișe extrase să fie cel puțin fișa unei eleve se poate realiza prin două evenimente incompatibile:

— între cele k fișe se găsește fișa unei eleve;

— între cele k fișe se găsesc fișele celor două eleve existente în clasă.

Numărul k se determină, ca fiind cel mai mare număr natural, care satisface la condițiile:

$$\begin{cases} \dfrac{C_2^1 C_{24}^{k-1}}{C_{26}^k} + \dfrac{C_2^2 C_{24}^{k-2}}{C_{26}^k} < 0{,}6 \\ 1 \leqslant k \leqslant 26 \end{cases}$$

Efectuînd calculul se obține:

$$\begin{cases} k^2 - 51k + 390 > 0 \\ 1 \leqslant k \leqslant 26. \end{cases}$$

Trinomul $k^2 - 51k + 390$ este pozitiv în intervalul $(-\infty, 9{,}4) \cup (41{,}6, \infty)$* care împreună cu condiția $1 \leqslant k \leqslant 26$ și k întreg, dă $k = 9$.

Etapa județeană, martie 1969

2. *Împărțim primele douăsprezece numere naturale în trei grupe a câte patru numere și înregistrăm fiecare grupă pe câte un bilet. Dintr-o urnă conținînd douăsprezece bile numerotate de la 1 la 12 se extrage, pe rînd, câte o bilă. Se cere:*

a) *Probabilitatea ca din șase extrageri patru numere să fie conținute pe un același bilet, presupunînd că bilele extrase nu sînt întoarse în urnă.*

b) *Probabilitatea de a obține cele patru numere ale unui bilet din șase extrageri, presupunînd că după fiecare extragere bila este reîntoarsă în urnă.*

Rezolvare. Să numerotăm biletele cu numerele 1, 2, 3. Fie A_i evenimentul ca din cele șase numere extrase, patru să fie pe biletul cu numărul i, $i = \overline{1,3}$. Evenimentele A_i sînt incompatibile, deoarece pe fiecare bilet sînt numere diferite. În problemă se cere probabilitatea $P = P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3)$ și deoarece $P(A_1) = P(A_2) = P(A_3)$ (numerele se scriu la întîmplare pe bilete) rămîne să calculăm pe $P(A_1)$.

a) Se aplică schema bilei neîntoarse:

$$P(A_1) = \frac{C_4^4 C_{12-4}^{6-4}}{C_{12}^6} = \frac{C_8^2}{C_{12}^6}, \text{ deci } P = 3 \cdot \frac{C_8^2}{C_{12}^6}$$

b) Se aplică schema lui Bernoulli,

$$P(A_1) = C_6^4 \left(\frac{4}{12}\right)^4 \left(\frac{8}{12}\right)^2 \text{ deci } P = 3 C_6^4 \left(\frac{1}{3}\right)^4 \left(\frac{2}{3}\right)^2.$$

Etapa finală, mai 1969

3. *Patru vînători trag simultan câte un foc într-o țintă. Știind că în condițiile în care are loc tragerea, fiecare vînător atinge ținta de 2 ori din 5 focuri, care este probabilitatea ca ținta să fie atinsă de cel puțin un vînător?*

---

*) Am calculat rădăcinile cu o singură zecimală exactă.

Rezolvare. Este mai ușor să aflăm probabilitatea evenimentului contrar, deci nici un vînător să nu atingă ținta; se aplică schema lui Bernoulli

$$Q = \left(\frac{3}{5}\right)^4, \text{ prin urmare } P = 1 - \left(\frac{3}{5}\right)^4.$$

Etapa locală, ianuarie 1970

4. *O urnă conține* 10 *bile dintre care trei roșii, patru galbene, una albastră și două albe. Bilele roșii, galbene, albastre și albe sînt marcate respectiv cu* 2; 5; 10 *și* 20 *puncte. Să se afle probabilitatea că extrăgînd simultan două bile să se obțină:*

a) *Șapte puncte.*

b) *Cel puțin șapte puncte.*

c) *O bilă să aibă mai puțin de* 10 *puncte și alta mai mult de* 10 *puncte.*

Rezolvare. În problemă se cere:

a) Probabilitatea ca între cele două bile extrase, una să fie roșie și una galbenă, deci

$$\frac{C_3^1 \cdot C_4^1}{C_{10}^2};$$

b) Să calculăm probabilitatea evenimentului contrar, deci să se obțină mai puțin de șapte puncte, adică ambele bile extrase să fie roșii, atunci $Q = \frac{C_3^2}{C_{10}^2}$ iar $P = 1 - Q$.

c) Probabilitatea ca cele două bile extrase să fie una roșie și una albă sau una galbenă și una albă, deci

$$\frac{C_3^1 C_2^1}{C_{10}^2} + \frac{C_4^1 C_2^1}{C_{10}^2}.$$

Etapa județeană, februarie 1970

5. *La un concurs de matematică* 3 *candidați primesc cîte un plic care conține n* ($n > 3$) *bilete cu probleme de algebră și geometrie. Cele trei plicuri conțin respectiv cîte* 1, 2, 3 *subiecte de algebră. Fiind examinați, cei trei candidați extrag fiecare cîte un bilet din plic. Extragerea făcîndu-se la întîmplare, să se afle probabilitățile următoarelor evenimente:*

a) *Toți candidații să fie examinați la geometrie.*

b) *Nici un candidat să nu fie examinat la geometrie.*

c) *Cel puțin un candidat să fie examinat la algebră.*

Rezolvare. Se aplică schema lui Poisson. Se formează polinomul:

$$P(x) = \left(\frac{1}{n}x + \frac{n-1}{n}\right)\left(\frac{2}{n}x + \frac{n-2}{n}\right)\left(\frac{3}{n}x + \frac{n-3}{n}\right) = \frac{1}{n^3}[6x^3 + (11n - 18)x^2 + (6n^2 - 22n + 18)x + (n-1)(n-2)(n-3)] = P_3x^3 + P_2x^2 + P_1x + P_0.$$

a) Termenul liber din polinomul $P(x)$, deci

$$P_0 = \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{n^3}.$$

b) Coeficientul lui x^3 din polinomul $P(x)$, deci

$$P_3 = \frac{6}{n^3}.$$

c) $P = 1 - P_0$.

Etapa finală, aprilie 1970

6. *Un zar cubic este astfel construit: o față este marcată cu un punct, două fețe cu câte două puncte și trei fețe cu câte* 3 *puncte, deci o aruncare cu zarul poate conduce la rezultatele* 1, 2 *sau* 3. *Zarul se aruncă de două ori și se notează cele două rezultate obținute.*

a) *Care este probabilitatea ca cele două rezultate să fie egale?*

b) *Care este probabilitatea ca suma celor două rezultate să fie patru?*

Rezolvare. Experienței de aruncare a zarului astfel marcat îi atașăm o variabilă aleatoare care ia ca valori numărul de puncte obținut, deci

$$X\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Celor două aruncări ale zarului le atașăm două variabile aleatoare independente X_1 și X_2 cu același tablou de distribuție ca și X.

a) $P(X_1 = X_2) = \sum_{k=1}^{3} P(X_1 = k)P(X_2 = k) = \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{7}{18}$;

b) $P(X_1 + X_2 = 4) = \sum_{k=1}^{3} P(X_1 = k)P(X_2 = 4 - k) = P(X_1 = 1)\,P(X_2 = 3) + P(X_1 = 2)\;P(X_2 = 2) + P(X_1 = 3)P(X_2 = 1) = \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6} = \frac{5}{18}$.

Notă. Pentru altă metodă de rezolvare vezi Gazeta Matematică, seria B, anul XXII, nr. 3, 1971, p. 147.

Etapa locală, ianuarie 1971

7. *Un număr de n trăgători trag în același timp într-o țintă mobilă. Probabilitatea de a nimeri și a doborî ținta este aceeași pentru toți trăgătorii și este egală cu* $\frac{1}{k}$ *unde k aparține mulțimii numerelor naturale.*

Să se calculeze probabilitatea ca ținta să fie doborîtă.

Rezolvare. Se calculează probabilitatea evenimentului contrar, deci ținta să nu fie doborîtă de nici un trăgător. Se aplică schema lui Bernoulli, $p = \frac{1}{k}$ și $q = \frac{k-1}{k}$ deci

$$Q = \left(\frac{k-1}{k}\right)^n = \left(1 - \frac{1}{k}\right)^n = 1 - C_n^1 \frac{1}{k} + \ldots + (-1)^n \frac{1}{k^n}.$$

iar

$$P = 1 - Q = C_n^1 \frac{1}{k} - C_n^2 \frac{1}{k^2} + \ldots + (-1)^{n-1} \frac{1}{k^n}.$$

Etapa județeană, februarie 1971

8. *O urnă conține N bile numerotate de la 1 pînă la N. Din această urnă se extrag n bile. Să notăm prin X cel mai mic număr scris pe bilele extrase și cu Y cel mai mare. Considerînd extracțiile cu și fără întoarcere să se calculeze:*

a) $P(X > x)$, $P(X = x)$

b) $P(Y \leqslant y)$, $P(Y = y)$.

Rezolvare. Extracțiile se fac cu întoarcerea bilei în urnă.

a) Evenimentul $X > x$ înseamnă ca bilele extrase să fie dintre bilele numerotate cu $x + 1$, $x + 2$, ..., N. Pentru fiecare extracție în parte sînt $N - x$ cazuri favorabile și N cazuri posibile, deci probabilitatea este egală cu $\frac{N-x}{N}$. Dacă se fac n extracții, acestea fiind independente, probabilitatea căutată este produsul probabilităților corespunzătoare fiecărei extracții, deci

$$P(X > x) = \frac{(N-x)^n}{N^n}.$$

Dar $P(X > x) = P(X = x + 1) + P(X = x + 2) + \ldots + P(X = N) = \frac{(N-x)^n}{N^n}$, iar $P(X > x-1) = P(X=x) + P(X=x+1) + \ldots + P(X=N) = \frac{(N-x+1)^n}{N^n}$, de unde $P(X = x) = P(X > x - 1) - P(X > x) = \frac{(N-x+1)^n}{N^n} - \frac{(N-x)^n}{N^n}$.

b) Evenimentul $Y \leqslant y$ înseamnă ca bilele extrase să fie dintre bilele numerotate cu 1, 2, ..., y. Pentru fiecare extracție în parte sînt y cazuri favorabile și N cazuri posibile, probabilitatea este deci egală cu $\frac{y}{N}$, iar pentru cele n extracții independente, avem:

$$P(Y \leqslant y) = \frac{y^n}{N^n}.$$

Dar

$$P(Y \leqslant y) = P(Y = 1) + P(Y = 2) + \ldots + P(Y = y - 1) + P(Y = y),$$

deci

$$P(Y = y) = P(Y \leqslant y) - P(Y \leqslant y - 1) = \frac{y^n}{N^n} - \frac{(y-1)^n}{N^n}.$$

Extracțiile se fac fără întoarcerea bilei în urnă

a) Pentru evenimentul $X = x$, sînt

— cazuri posibile: $\mathcal{C}_N^n$;

— cazuri favorabile: $\mathcal{C}_{N-x}^{n-1}$, deoarece pentru bila cu cel mai mic număr avem un singur caz favorabil și anume: bila numerotată cu x, caz pe care-l combinăm cu toate cele $\mathcal{C}_{N-x}^{n-1}$ cazuri diferite de extragere a celorlalte n-1 bile dintre bilele numerotate cu $x + 1$, $x + 2$, ..., N (deci dintre $N - x$ bile), prin urmare

$$P(X = x) = \frac{\mathcal{C}_{N-x}^{n-1}}{\mathcal{C}_N^n}.$$

Pentru ca $P(X = x) \neq 0$, trebuie ca $N - x \geqslant n - 1$ deci $x \leqslant N - n + 1$. Apoi $P(X > x) = P(X = x + 1) + P(X = x + 2) + \ldots + P(X = N - n + 1) = \sum_{k=x+1}^{N-n+1} \frac{\mathcal{C}_{N-k}^{n-1}}{\mathcal{C}_N^n}$.

b) Pentru evenimentul $Y = y$, sînt

— cazuri posibile: $\mathcal{C}_N^n$

— cazuri favorabile $\mathcal{C}_{y-1}^{n-1}$, deoarece pentru bila cu cel mai mare număr avem un singur caz favorabil și anume bila numerotată cu y, caz pe care-l combinăm cu toate cele $\mathcal{C}_{y-1}^{n-1}$ cazuri de extragere a celorlalte $n-1$ bile dintre bilele numerotate cu 1, 2, ..., $y - 1$, prin urmare

$$P(Y = y) = \frac{\mathcal{C}_{y-1}^{n-1}}{\mathcal{C}_N^n}.$$

Pentru ca $P(Y = y) \neq 0$, trebuie ca $y - 1 \geqslant n - 1$, deci $y \geqslant n$.

Apoi

$$P(Y \leqslant y) = P(Y = n) + P(Y = n + 1) + \ldots + P(Y = y) =$$

$$= \sum_{k=n}^{y} \frac{C_{k-1}^{n-1}}{C_N^n}.$$

Notă. Vezi problemele 21, 22, 26—29, 35, 36, § 3, Cap. II.

Etapa finală, mai 1971

9. *O urnă conține bile albe și bile negre. Din această urnă se fac extracții cu întoarcere, adică înainte de extragerea unei bile, bila extrasă anterior se pune înapoi în urnă.*

Fie p probabilitatea de a extrage o bilă albă și $q = 1 - p$ probabilitatea de a extrage o bilă neagră. Se cere:

a) *Probabilitatea ca prima bilă albă să se obțină la extracția k.*

b) *Se fac extracții până se obțin l bile negre.* Fie $l + x$ *numărul necesar de extracții. Care este probabilitatea ca $x = m$?*

Rezolvare. a) Să notăm cu A_i evenimentul ca în extracția de rang i să apară o bilă albă, atunci $\bar{A}_i$ este evenimentul ca în extracția de rang i să apară o bilă neagră. Evenimentele A_i sînt independente, deoarece extragerile de bile se fac cu întoarcere. Se cere probabilitatea evenimentului $\bar{A}_1 \cap \ldots \cap \bar{A}_{k-1} \cap A_k$ dar

$$P(\bar{A}_1 \cap \ldots \cap \bar{A}_{k-1} \cap A_k) = P(\bar{A}_1) \ldots P(\bar{A}_{k-1}) P(A_k) = q^{k-1}p,$$

deoarece $P(A_i) = p$ iar $P(\bar{A}_i) = q$.

b) Pentru ca în $l + x$ extracții să apară l bile negre, ultima bilă extrasă fiind tot neagră (altfel s-ar face mai puține extracții pentru obținerea a l bile negre), trebuie să se realizeze două evenimente independente și anume: în primele $l + x - 1$ extracții să apară $l - 1$ bile negre (probabilitatea acestui eveniment o calculăm aplicînd schema lui Bernoulli) și în ultima extracție, deci în extracția de rang $l + x$ să apară o bilă neagră (cu probabilitatea q). Prin urmare, probabilitatea ca în $l + x$ extracții să apară l bile negre este egală cu

$$C_{l+x-1}^{x} p^x q^{l-1} q = C_{l+x-1}^{l-1} p^x q^l.^{*)}$$

Probabilitatea cerută se obține făcînd pe $x = m$, deci

$$p = C_{l+m-1}^{m} p^m q^l = C_{l+m-1}^{l-1} p^m q^l.$$

---

*) Am folosit relația $C_n^m = C_n^{n-m}$

Anexa 2

Probabilități geometrice. Probleme pentru cercuri de matematică

S-a văzut că definiția clasică a probabilității se aplică numai în condiții foarte restrictive și anume în cazul experiențelor cu probe egal posibile și cu un număr finit de probe (cazuri posibile).

Dacă probele experienței sînt egal posibile dar experiența are o infinitate de probe, definiția clasică nu se mai poate aplica. Atunci cînd pentru astfel de experiențe se pot interpreta mulțimile de cazuri posibile și de cazuri favorabile ca mulțimile punctelor unor anumite domenii dintr-un spațiu euclidian n-dimensional, R_n(R_1 = dreapta reală; R_2 = planul; R_3 = spațiul cu 3 dimensiuni etc.) se folosesc probabilitățile geometrice la care se ajunge în felul următor:

Să considerăm un domeniu D din spațiul euclidian R_n și un alt domeniu d, conținut în D. Probabilitatea ca un punct luat la întîmplare din domeniul D să aparțină domeniului d este natural să o luăm proporțională cu măsura domeniului d*), deci

$$P = k \text{ măs } d.$$

Factorul de proporționalitate k se determină din observația că probabilitatea ca luînd la întîmplare un punct din domeniul D, el să aparțină domeniului D este egală cu 1 (probabilitatea unui eveniment cert), adică

$$1 = k \text{ măs } D,$$

deci

$$k = \frac{1}{\text{măs } D},$$

și prin urmare

$$P = \frac{\text{măs } d}{\text{măs } D}.$$

În toate problemele care urmează vom nota cu

A_p: măsura domeniului care reprezintă mulțimea cazurilor posibile și cu

A_f: măsura domeniului care reprezintă mulțimea cazurilor favorabile și deci

$$P = \frac{A_f}{A_p}.$$

*) În R_1 lungimea intervalului, în R_2 aria figurii plane, în R_3 volumul corpului etc.

1. *Se consideră elipsa* $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0$, $(b\leqslant a)$ *și triunghiul ale cărui vîrfuri sînt extremitățile axei mari și una dintre extremitățile axei mici ale elipsei. Să se afle probabilitatea că luînd la întîmplare un punct din interiorul elipsei, punctul să se găsească și în interiorul triunghiului considerat.*

Rezolvare. Probabilitatea căutată va fi

$$P=\frac{A_f}{A_p},$$

unde A_f este aria triunghiului, iar A_p aria elipsei.

Dar

$$A_p=4\frac{b}{a}\int_0^a\sqrt{a^2-x^2}dx=\pi ab$$

iar

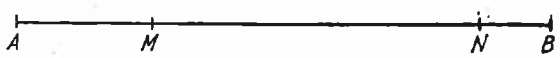
$$A_f=ab,\ \text{deci}\ P=\frac{ab}{\pi ab}=\frac{1}{\pi}.$$

Observație. Probabilitatea găsită nu depinde de mărimea celor două axe ale elipsei.

2. *Un segment de dreaptă este împărțit în trei părți; cele două puncte de diviziune sînt luate la întîmplare. Care este probabilitatea ca cele trei segmente obținute să poată reprezenta laturile unui triunghi?*

Rezolvare. Fie AB segmentul considerat a cărui lungime o notăm cu a, iar M și N două puncte de diviziune ale acestui segment, luate în ordinea din fig. 67. Toate cazurile experienței considerată în această problemă se determină prin pozițiile punctelor M și N, cu alte cuvinte prin două numere $x=AM$ și $y=NB$, fiecare din ele fiind luate la întîmplare din intervalul $(0,\ a)$, deci, $0\leqslant x\leqslant a$ și $0\leqslant y\leqslant a$. În plus, trebuie să avem $x+y\leqslant a$ (deoarece lungimea $x+y$ a două dintre cele trei segmente obținute nu poate să depășească lungimea segmentului întreg).

Fig. 67

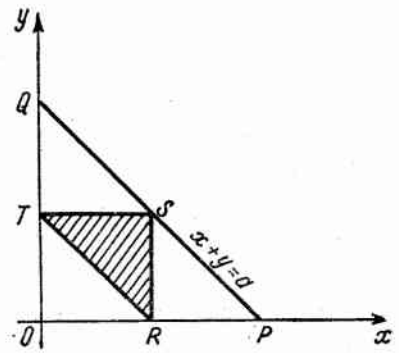


Considerînd fiecare pereche de numere x și y drept coordonatele unui punct din plan, mulțimea cazurilor posibile este reprezentată prin mulțimea punctelor triunghiului OPQ, mărginit de axele de coordonate și de dreapta $x+y=a$ (vezi figura 68). Fie A_p aria acestui triunghi.

Să determinăm acum partea triunghiului OPQ care conține punctele corespunzătoare cazurilor favorabile ale experienței.

Pentru ca cele trei segmente obținute să poată reprezenta laturile unui triunghi, este necesar ca fiecare dintre ele să fie mai mic decît suma celorlalte două. Deoarece suma celor trei segmente este egală cu a, rezultă că vom avea un caz favorabil, dacă fiecare dintre cele trei segmente este mai

Fig. 68



mic decît $\frac{a}{2}$, deci mulțimea cazurilor favorabile este determinată prin inegalitățile

$$x < \frac{a}{2}, \quad y < \frac{a}{2}, \quad x + y > \frac{a}{2}.$$

Reprezentînd în plan, dreptele (RS) $x = \frac{a}{2}$; $(TS) y = \frac{a}{2}$; $(RT) x + y = \frac{a}{2}$, deducem că punctele triunghiului haşurat RST din figura 68 corespund cazurilor favorabile. Deoarece aria acestui triunghi este egală cu $\frac{1}{4}$, din aria triunghiului OPQ rezultă $A_f = \frac{1}{4} A_p$ și deci probabilitatea căutată este $P = \frac{1}{4}$.

Observație. În soluția dată am considerat un caz al experienței determinat prin mărimile segmentelor AM și NB. În locul acestora putem folosi, de asemenea, alte perechi de segmente determinate de punctele A, M, N, B în ordinea dată. De exemplu: AM și AN, sau AM și MN etc.

3. *Pe un cerc se iau la întîmplare trei puncte A, B și C. Care este probabilitatea ca triunghiul ABC să fie ascuțitunghic?*

Rezolvare. Deoarece toate punctele de pe cerc au aceeași probabilitate să fie alese, putem considera că primul dintre cele trei puncte alese (punctul A) este fixat într-un anumit mod. În acest caz, pozițiile punctelor B și C vor fi date de lungimile arcelor AB și AC, măsurate într-un sens anumit (de

exemplu, în sensul mișcării acelor de ceasornic). Tăiem cercul în punctul A și-l desfășurăm pe segmentul AA' ca în figura 69 (faptul că cele două extremități ale segmentului obținut reprezintă un același punct al cercului nu este esențial).

Fig. 69

Existența unui unghi obtuz în triunghiul ABC (fig. 70) înseamnă evident că unul dintre cele trei arce în care vîrfurile împart cercul are lungimea mai mare decît o jumătate de cerc. De aceea, prin trecerea de la cerc la segmentul AA' problema considerată se reduce la următoarea:

Pe segmentul AA' sînt luate la întîmplare două puncte B și C. Care este probabilitatea ca nici una dintre cele trei părți în care aceste puncte împart segmentul să nu fie mai mare decît jumătate din lungimea segmentului?

Astfel, problema considerată s-a redus la problema precedentă, prin urmare, probabilitatea căutată este egală cu $\frac{1}{4}$.

4. *Care este probabilitatea ca suma a două numere luate la întîmplare din intervalul* $[0,1]$ *să nu depășească pe* 1, *iar produsul lor să nu depășească pe* $\frac{2}{9}$?

Rezolvare. Notăm cu x și y numerele luate. Mulțimea tuturor cazurilor posibile este mulțimea punctelor de coordonate (x, y) astfel ca

$$0 \leqslant x \leqslant 1, \quad 0 \leqslant y \leqslant 1, \tag{1}$$

adică mulțimea punctelor din plan cuprinse în pătratul $OABC$ (vezi figura 71) cu latura egală cu unu, aria acestui pătrat fiind egală cu 1; $A_p = 1$.

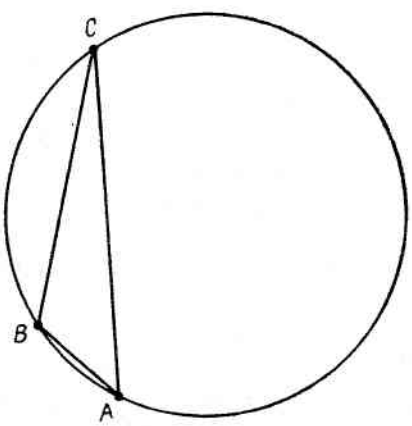


Fig. 70

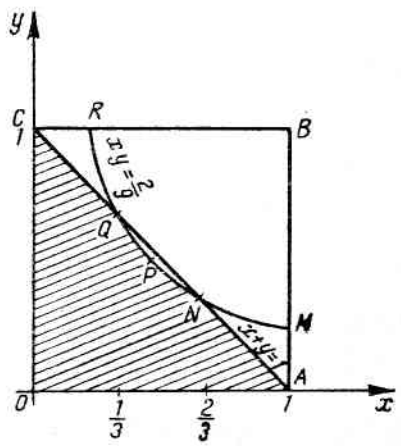


Fig. 71

Mulțimea cazurilor favorabile este formată din mulțimea punctelor de coordonate (x,y) astfel ca

$$x + y \leqslant 1,\ xy \leqslant \frac{2}{9}. \tag{2}$$

Ținînd seama că x și y trebuie să satisfacă inegalitățile (1), prima inegalitate (2) dă triunghiul OAC a cărui latură AC are ecuația $x + y = 1$, iar a doua inegalitate (2) reprezintă domeniul mărginit de segmentele rectilinii $\overline{OA}$, $\overline{AM}$, $\overline{RC}$, $\overline{CO}$ și de arcul $MNPQR$ al hiperbolei echilatere $xy = \frac{2}{9}$. Prin urmare, mulțimea cazurilor favorabile este porțiunea haşurată din pătratul $OABC$, mărginită de segmentele rectilinii $\overline{OA}$, $\overline{AN}$, $\overline{QC}$, $\overline{CO}$ și de arcul de hiperbolă echilateră NPQ. Abscisele punctelor Q și N se obțin intersectînd dreapta $x + y = 1$ cu hiperbola $xy = \frac{2}{9}$ și sînt respectiv $x_Q = \frac{1}{3}$ și $x_N = \frac{2}{3}$.

Aria haşurată se obține scăzînd din aria triunghiului OAC, aria cuprinsă între segmentul rectiliniu $\overline{QN}$ și arcul de hiperbolă QPN, obținem

$$A_f = \frac{1}{2} - \int_{1/3}^{2/3} \left(1 - x - \frac{2}{9x}\right) dx = \frac{1}{3} + \frac{2}{9} \log 2.$$

Deci probabilitatea căutată este

$$P = \frac{A_f}{A_p} = A_f = \frac{1}{3} + \frac{2}{9} \log 2 \simeq 0{,}487.$$

5. *Două persoane au convenit să se întîlnească într-un anumit loc între orele* 12 *și* 13. *Conform înțelegerii, primul sosit așteaptă pe al doilea timp de* 15 *minute, după care pleacă. Să se găsească probabilitatea ca cele două persoane să se întîlnească dacă pentru fiecare dintre ele momentul sosirii la locul convenit este luat la întîmplare între orele* 12 *și* 13. *)

Rezolvare. Presupunem că prima persoană sosește într-un moment oarecare x dintre orele 12 și 13, iar a doua persoană sosește într-un moment y, din același interval. Toate cazurile posibile ale experienței considerate în această problemă sînt definite de două numere x, $y \in [0,1]$.

Considerînd aceste numere drept coordonate ale unor puncte din plan, mulțimea tuturor cazurilor posibile este reprezentată prin mulțimea punctelor din pătratul $OABC$ cu latura egală cu 1 (figura 72), deci $A_p = 1$.

Să găsim acum mulțimea cazurilor favorabile. Pentru ca cele două persoane să se întîlnească, trebuie ca între momentele sosirii lor să existe o diferență de cel mult un sfert de oră $\left(\frac{1}{4}\text{ oră}\right)$. Prin urmare, mulțimea cazu-

*) Acest tip de problemă este cunoscut sub numele de „problema întîlnirii".

rilor favorabile este reprezentată prin acele puncte de coordonate (x, y) din pătratul $OABC$, pentru care $|x - y| \leqslant \frac{1}{4}$. Rezultă că mulțimea cazurilor favorabile este reprezentată în figura 72 prin porțiunea haşurată $OMNBPQO$, delimitată în pătratul $OABC$ prin dreptele

$$y = x + \frac{1}{4}, \quad y = x - \frac{1}{4}.$$

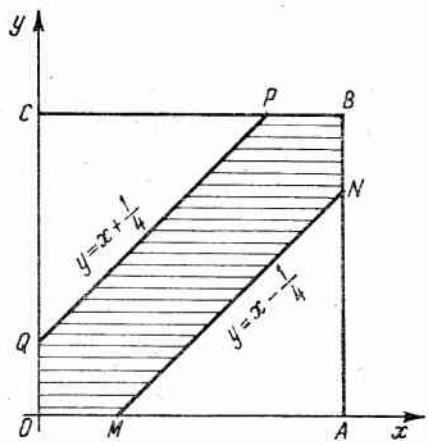


Fig. 72

Deoarece $\overline{OM} = \overline{NB} = \overline{BP} = \overline{OQ} = \frac{1}{4}$ deducem că $A_f = \text{aria } OMNBPQO = 1 - 2 \text{ aria } MAN = \frac{7}{16}$. Prin urmare probabilitatea căutată este:

$$P = \frac{A_f}{A_p} = A_f = \frac{7}{16}.$$

6. *Două persoane pot sosi cu aceeași probabilitate în orice moment din intervalul de timp $[0, T]$, într-un anumit loc. Să se determine probabilitatea ca intervalul de timp dintre sosirile celor două persoane să nu fie mai mare decît t $(t < T)$.*

Rezolvare. Notăm cu x și y momentele sosirilor celor două persoane la locul întîlnirii. Aceste două momente trebuie să fie din intervalul dat, deci, $x, y \in [0,T]$. În plan, mulțimea punctelor de coordonate (x, y) cu $x, y \in [0, T]$, reprezintă un pătrat $OABC$ cu laturile egale cu T (vezi figura 73), deci acest pătrat conține mulțimea cazurilor posibile, prin urmare $A_p = T^2$.

Mulțimea cazurilor favorabile se reprezintă prin: $x, y \in [0,T]$ și inegalitatea $|y - x| \leqslant t$, care în figura 73 reprezintă domeniul haşurat $OMNBPQO$ delimitat în pătratul $OABC$ de dreptele $y = x + t$, $y = x - t$.

Deoarece $OM = NB = PB = OQ = t$, rezultă că
A_f = aria $OMNBPQO = T^2 - (T - t)^2$, deci probabilitatea căutată este

$$P = \frac{A_f}{A_p} = 1 - \left(1 - \frac{t}{T}\right)^2.$$

Observație. Problema precedentă se obține ca un caz particular al acestei probleme pentru $T = 1$, $t = \frac{1}{4}$.

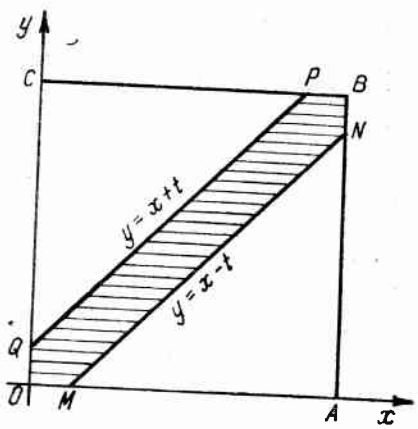


Fig. 73

7. *Două vapoare trebuie să fie acostate la un același stîlp. Momentele sosirilor celor două vapoare sînt independente și egal posibile, în decursul celor 24 de ore ale unei zile. Care este probabilitatea ca unul din vapoare să găsească stîlpul ocupat, știind că timpul de staționare a primului vapor sosit este de o oră, iar a celuilalt de două ore?*

Rezolvare. Fie x și y momentele sosirilor celor două vapoare. Din condițiile problemei rezultă pentru cazurile posibile $x, y \in [0,24]$. Deci considerînd aceste numere drept coordonate ale punctelor din plan, mulțimea cazurilor posibile se reprezintă prin mulțimea de puncte din pătratul $OABC$ cu latura egală cu 24 (vezi figura 74), deci $A_p = 24^2$.

Mulțimea cazurilor favorabile este mulțimea punctelor de coordonate (x, y) din plan pentru care $x, y \in [0,24]$ și în plus

$$y - x \leqslant 1, \; x - y \leqslant 2.$$

În figura 74 mulțimea cazurilor favorabile este reprezentată prin domeniul haşurat, $OMNBPQO$. Deoarece $OM = NB = 2$, $PB = OQ = 1$, urmează că:

A_f = aria $OMNBPQO$ = aria $OABC$ − aria MAN − aria QPC, deci

$$A_f = 24^2 - \frac{22^2}{2} - \frac{23^2}{2} = \frac{139}{2}.$$

Probabilitatea cerută este:

$$P = \frac{A_f}{A_p} = \frac{139}{1152} \simeq 0{,}121.$$

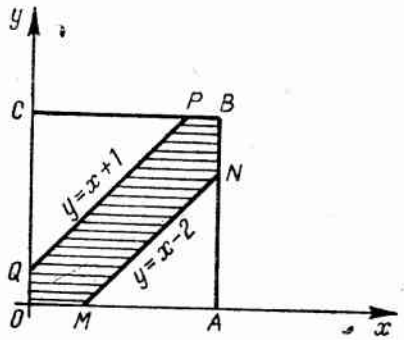


Fig. 74

8. *Se consideră ecuația* $x^2 + 2ax + b = 0$, *ai cărei coeficienți* a *și* b *sînt luați la întîmplare din intervalele* $|a| \leqslant n$, $|b| \leqslant m$. *Se cere:*

a) *Probabilitatea ca rădăcinile ecuației să fie reale.*

b) *Probabilitatea ca rădăcinile ecuației să fie pozitive.*

Rezolvare. Mulțimea tuturor cazurilor posibile este definită prin inegalitățile

$$-n \leqslant a \leqslant n; \quad -m \leqslant b \leqslant m, \tag{3}$$

deci este mulțimea punctelor din plan, de coordonate (a, b) cuprinse în dreptunghiul $ABCD$ (vezi figura 75) a cărui arie este $4mn$, deci $A_p = 4mn$.

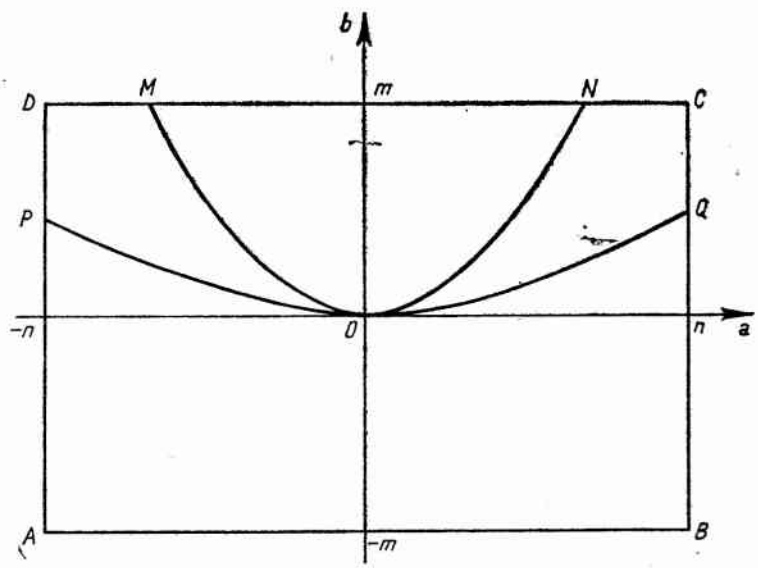


Fig. 75

a) Mulțimea cazurilor favorabile este dată de condiția $\Delta = a^2 - b \geqslant 0$, deci

$$b \leqslant a^2. \tag{4}$$

Ecuația $b = a^2$ reprezintă o parabolă a cărei axă de simetrie este Ob, iar vîrful este în originea O, care este punctul de minim al parabolei.

Parabola precedentă intersectează latura DC în două puncte (simetrice față de Ob), M și N, dacă $m \leqslant n^2$. În cazul $m \geqslant n^2$, parabola intersectează laturile AD, BC respectiv, în punctele P și Q (de asemenea simetrice față de Ob). Ne vom ocupa pe rînd de aceste două cazuri.

Dacă $m \leqslant n^2$, cazurile favorabile sînt reprezentate prin mulțimea mărginită de segmentele rectilinii AB, BC, CN, MD, DA și de arcul de parabolă NOM. Abscisele punctelor M și N sînt respectiv, $x_M = -\sqrt{m}$, $x_N = \sqrt{m}$. Aria mulțimii cazurilor favorabile, după cum se vede ușor, este dată de

$$A_f = 4mn - 2\int_0^m \sqrt{b}\, db = 4mn - \frac{4}{3} m\sqrt{m}.$$

Probabilitatea căutată este în acest caz:

$$P = \frac{A_f}{A_p} = 1 - \frac{\sqrt{m}}{3n}.$$

Dacă $m \geqslant n^2$, cazurile favorabile sînt reprezentate prin mulțimea mărginită de segmentele rectilinii AB, BQ, PA și de arcul de parabolă QOP. Aria acestei mulțimi este

$$A'_f = 2mn + 2\int_0^n a^2\, da = 2mn + \frac{2n^3}{3}.$$

În acest caz, probabilitatea căutată este

$$P' = \frac{A'_f}{A_p} = \frac{1}{2} + \frac{n^2}{6m}.$$

Se va observa că atunci cînd $m = n^2$, $P = P' = \frac{2}{3}$.

b) Rădăcinile ecuației vor fi pozitive cînd pe lîngă condițiile (3) și (4) avem:

$$a \leqslant 0,\ b \geqslant 0. \tag{5}$$

În cazul $m \leqslant n^2$ se găsește probabilitatea $P'' = \frac{1}{4} - \frac{\sqrt{m}}{6n}$, iar în cazul $m \geqslant n^2$, probabilitatea este $P''' = \frac{n^2}{12m}$. În cazul $m = n^2$, se obține $P'' = P''' = \frac{1}{12}$.

9. *Pe o masă sînt trasate linii paralele echidistante. Fie h distanța dintre două linii. Se aruncă pe masă un ac foarte subțire, de lungime l. Să se găsească probabilitatea ca acul să intersecteze:*

a) *O linie, în cazul* $l < h$. *)

b) *Cel puțin o linie, în cazul* $l > h$.

c) *O linie, în cazul* $l = h$.

Rezolvare. a) Se determină poziția acului față de două linii vecine, prin distanța $x = OP$ dintre mijlocul acului și linia cea mai apropiată și prin unghiul ascuțit φ dintre OP și ac (vezi figura 76).

Mulțimea cazurilor posibile este dată de mulțimea punctelor din plan de coordonate (φ, x) astfel ca $0 \leqslant x \leqslant \frac{h}{2}$, $0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}$, deci este reprezentată prin dreptunghiul $OABC$ cu laturile $OA = \frac{\pi}{2}$, $OC = \frac{h}{2}$ (vezi figura 77).

Avem, prin urmare

$$A_p = \frac{h\pi}{4}.$$

Pentru a găsi mulțimea cazurilor favorabile observăm că acul intersectează o linie cînd

$$x < \frac{l}{2} \cos \varphi,$$

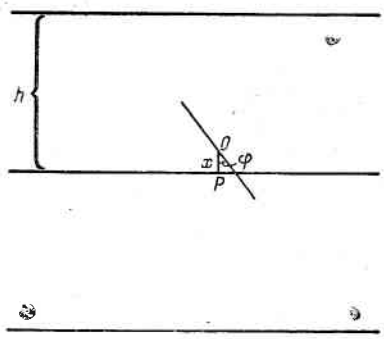


Fig. 76

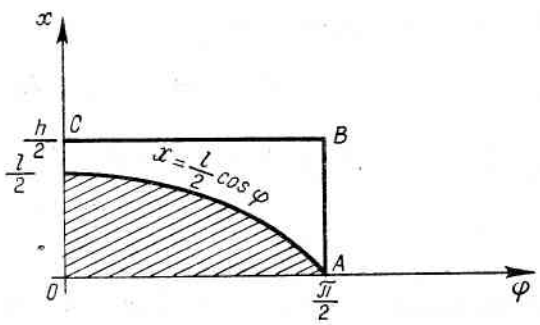


Fig. 77

deci mulțimea cazurilor favorabile este reprezentată prin domeniul haşurat din figura 77. Atunci

$$A_f = \frac{l}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \varphi \, d\varphi = \frac{l}{2},$$

*) Această problemă este cunoscută sub numele de *problema acului*.

de unde probabilitatea căutată este

$$P = \frac{A_f}{A_p} = \frac{2l}{h\pi}. \tag{6}$$

Această problemă se poate trata ca un caz limită a unei alte probleme, cu un număr finit de cazuri posibile pentru care poate fi folosită definiția clasică a probabilității.

Să presupunem că împărțim pe $\frac{h}{2}$ într-un număr arbitrar m de părți egale, $a = \frac{h}{2m}$, și la fel unghiul drept $\pi/2$ în n părți egale $\omega = \pi/2n$.

Să presupunem apoi că distanța x poate lua numai valorile

$$0, a, 2a, \ldots, ma,$$

iar unghiul φ valorile

$$0, \omega, 2\omega, \ldots, n\omega.$$

Atunci

$$N = (m + 1)(n + 1)$$

este numărul de cazuri posibile pentru poziția acului, cazuri pe care le putem considera egal posibile. Acul taie una din linii, cînd

$$x < \frac{l}{2}\cos\varphi,$$

deci numărul cazurilor favorabile este egal cu numărul perechilor de întregi i, j, astfel ca

$$ia < \frac{l}{2}\cos j\omega, \quad i = \overline{0, m}; \; j = \overline{0, n}. \tag{7}$$

Deoarece conform ipotezei, $l < h$, cea mai mare valoare a lui i care satisface inegalitatea este mai mică decît m. Pentru un j dat există $k + 1$ valori ale lui i, care satisfac (7), k fiind cel mai mare întreg mai mic decît $\frac{1}{2a}\cos j\omega$, cu alte cuvinte, k este întregul determinat prin condiția

$$ka < \frac{l}{2}\cos j\omega \leqslant (k + 1)\, a$$

sau

$$k < \frac{l}{2a}\cos j\omega \leqslant k + 1,$$

(cele $k + 1$ valori pentru i sînt: 0, 1, 2, ..., k).

Numărul valorilor posibile ale lui i pentru un j dat poate fi reprezentat prin:

$$m_j = \frac{l}{2a}\cos j\omega + \theta_j,$$

unde θ_j poate depinde de j, dar pentru orice j, $0 \leqslant \theta_j < 1$.

Făcînd suma tuturor m_j, pentru $j = \overline{0, n}$, obținem numărul cazurilor favorabile

$$M = \frac{l}{2a}(1 + \cos\omega + \cos 2\omega + \ldots + \cos n\omega) + n\theta,$$

unde s-a notat prin θ un număr care satisface inegalitatea

$$0 \leqslant \theta < 1.$$

Se știe că:

$$1 + \cos\omega + \cos 2\omega + \ldots + \cos n\omega = \frac{1}{2} + \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)\omega}{2\sin\frac{\omega}{2}},$$

de unde, ținînd seama că $\omega = \pi/2n$, obținem:

$$1 + \cos\omega + \ldots + \cos n\omega = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\operatorname{ctg}\frac{\omega}{2}.$$

Deci

$$M = \frac{l}{4a}\operatorname{ctg}\frac{\omega}{2} + \frac{l}{4a} + n\theta.$$

Împărțind pe M la N și înlocuind a și ω prin valorile lor

$$a = \frac{h}{2m}, \quad \omega = \frac{\pi}{2n},$$

obținem:

$$\frac{M}{N} = \frac{l}{2h}\,\frac{m}{m+1}\,\frac{\operatorname{ctg}\frac{\pi}{4n}}{n+1} + \frac{l}{2h}\,\frac{m}{m+1}\,\frac{1}{n+1} + \frac{n\theta}{(m+1)(n+1)},$$

care este probabilitatea pentru problema cu un număr finit de cazuri.

Probabilitatea cerută în problemă se obține din expresia precedentă, făcînd pe m și n să tindă la infinit.

Deoarece

$$\lim_{m\to\infty}\frac{m}{m+1} = 1; \quad \lim_{\substack{m\to\infty\\ n\to\infty}}\frac{m}{(m+1)(n+1)} = \lim_{\substack{m\to\infty\\ n\to\infty}}\frac{n}{(m+1)(n+1)} = 0$$

și

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\operatorname{ctg} \frac{\pi}{4n}}{n+1} = \frac{4}{\pi},$$

avem

$$P = \lim_{\substack{m\to\infty \\ n\to\infty}} \frac{M}{N} = \frac{2l}{h\pi}$$

deci am ajuns la rezultatul căutat.

b) Evenimentul a cărui probabilitate o căutăm se poate realiza prin două modalități incompatibile:

— acul intersectează exact o linie;

— acul intersectează cel puțin două linii.

În ambele cazuri fixăm poziția acului la fel ca la punctul a). Mulțimea cazurilor posibile este aceeași pentru ambele modalități și aceeași ca la punctul a), deci

$$A_p = \frac{h\pi}{4}.$$

Pentru găsirea mulțimii cazurilor favorabile tratăm separat fiecare modalitate.

Pentru ca acul să intersecteze o linie trebuie ca $x \leqslant \frac{l}{2} \cos \varphi$, dar

$$\frac{l}{2} \cos \varphi \leqslant \frac{h}{2}. \tag{8}$$

Fie φ_0 unghiul ascuțit determinat prin condiția $\frac{l}{2} \cos \varphi_0 = \frac{h}{2}$, deci

$$\cos \varphi_0 = \frac{h}{l}. \tag{9}$$

Atunci din inegalitatea (8) urmează

$$\cos \varphi \leqslant \cos \varphi_0$$

și cum cosinusul este o funcție descrescătoare în primul cadran, avem $\varphi \geqslant \varphi_0$. Deci mulțimea cazurilor favorabile este reprezentată în figura 78 prin domeniul haşurat orizontal, și prin urmare

$$A_f = \frac{l}{2} \int_{\varphi_0}^{\frac{\pi}{2}} \cos \varphi \, d\varphi = \frac{l}{2} (1 - \sin \varphi_0).$$

Pentru ca acul să intersecteze cel puțin două linii trebuie, la fel ca mai înainte, ca $x \leqslant \frac{l}{2} \cos \varphi$, dar de data aceasta

(10) $$\frac{l}{2} \cos \varphi \geqslant \frac{h}{2} .$$

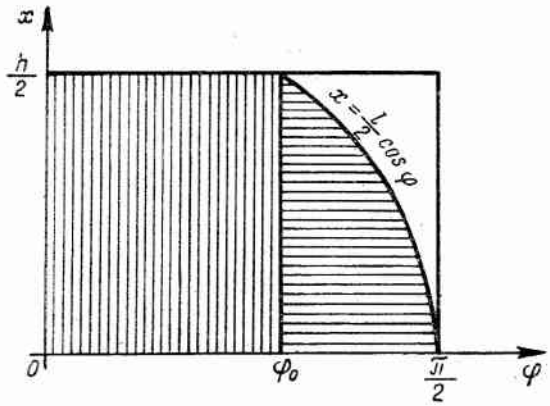


Fig. 78

Ținînd seama de egalitatea (9) din inegalitatea (10) se obține

$$\cos \varphi \geqslant \cos \varphi_0$$

deci $\varphi \leqslant \varphi_0$ și mulțimea cazurilor favorabile este reprezentată în figura 78 prin domeniul haşurat vertical, avem

$$A_f' = \frac{h\varphi_0}{2} .$$

Prin urmare, probabilitatea căutată este

(11) $$P' = \frac{A_f}{A_p} + \frac{A_f'}{A_p} = 2l \frac{1 - \sin \varphi_0}{h\pi} + \frac{2\varphi_0}{\pi} .$$

c) Dacă $l = h$ atunci din egalitatea (9) urmează $\cos \varphi_0 = 1$, deci $\varphi_0 = 0$, $\sin \varphi_0 = 0$, și (11) se reduce la

$$P'' = \frac{2}{\pi} .$$

Același rezultat se obține din formula (6) de la punctul a) făcînd $l = h$.

Atragem atenția asupra faptului că atunci cînd lungimea acului coincide cu distanța dintre linii, probabilitatea ca acul să intersecteze o linie nu depinde de lungimea acului.

Observație. Pentru $l = \frac{h}{2}$ din formula (6) de la punctul a) se obține $P = \frac{1}{\pi}$, iar pentru $h = \frac{l}{2}$, din formulele (11) și (9) de la punctul b), se obține

$P' = \frac{2}{\pi} + \frac{1}{2}$, deci în ambele cazuri probabilitatea găsită nu mai depinde de lungimea acului.

Notă. Problema acului, deci punctul a) din problema precedentă, este cea mai veche problemă de probabilitate geometrică. A fost menționată pentru prima dată în anul 1733 de către Buffon *), de aceea această problemă este cunoscută și sub numele de *problema lui Buffon.*

În secolul trecut folosindu-se problema lui Buffon s-au obținut două lucruri :

1°. S-a verificat experimental o teoremă a lui Bernoulli **: pentru anumite experiențe frecvența relativă (raportul dintre numărul realizărilor unui eveniment și numărul experiențelor făcute) prezintă abateri din ce în ce mai mici față de probabilitatea evenimentului, pe măsură ce crește numărul de experiențe făcute. Această teoremă are o importanță deosebită în special pentru aplicații, deoarece permite să se înlocuiască probabilitatea unui eveniment prin frecvența relativă de apariție a acelui eveniment, frecvență care poate fi determinată experimental. Să notăm cu n numărul de aruncări ale acului și cu m numărul de intersecții ale unei linii, atunci frecvența relativă $f_n = \frac{n}{m}$ și s-a verificat experimental că

$$P = \frac{2l}{h\pi} \simeq \frac{m}{n} = f_n .$$

Astfel, *R. Wolf*, astronom din Zürich, a făcut între anii 1849 și 1853, $n = 5000$ aruncări cu un ac de $l = 36$ mm, iar $h = 45$ mm. A obținut $m = 2532$, deci

$$P = \frac{72}{45\pi} = 0{,}5093 \simeq 0{,}5064 = \frac{2532}{5000} = \frac{m}{n} = f_{5000}.$$

Reina în $n = 2520$ aruncări, $l = 3$cm, $h = 6$cm a obținut

$$P = 0{,}345 \simeq 0{,}341 = f_{2520}.$$

2°. Din

$$P = \frac{2l}{h\pi} \simeq \frac{m}{n} = f_n$$

se poate obține

$$\pi \simeq \frac{2ln}{hm},$$

deci o valoare aproximativă pentru numărul π.

Astfel *R. Wolf*, în experiența sa, a obținut

$$\pi \simeq 3{,}1596.$$

---

*) Georges-Louis Leclerc, de Buffon (1707—1788) celebru naturalist francez.

**) Vezi nota **) de la pagina 31.

Ambrose Smith a făcut în anul 1855, $n = 3204$ aruncări a unui ac cu $l = \frac{3}{5} h$. A obținut $m = 1213$, și 11 cazuri de contact în care nu s-a putut decide dacă acul intersectează sau nu o linie. Dacă din cele 11 cazuri, 5 sînt considerate intersecții, se obține

$$\pi \simeq 3{,}155,$$

iar dacă toate cele 11 cazuri de dubiu sînt considerate intersecții, se obține

$$\pi \simeq 3{,}1412.$$

Focks în anul 1894 în $n = 1120$ aruncări a obținut

$$\pi \simeq 3,\ 1419,$$

iar *Lazzarini* în anul 1901 în $n = 3408$ aruncări a obținut

$$\pi \simeq 3{,}1415929.$$

Desigur, în zilele noastre, cînd cu mașini electronice de calcul se poate obține valoarea lui π cu exactitate pînă la orice zecimală dorim, posibilitatea de aflare a numărului π prin problema lui Buffon își pierde importanța. Rămîne însă foarte importantă *ideea* pe care o conține și anume: determinarea unei mărimi prin:

— interpretarea ei în cadrul unui model probabilistic;

— efectuarea în cadrul modelului găsit a unui număr mare de experiențe, în urma cărora se găsește mărimea căutată cu o anumită aproximație. Această idee stă la baza metodelor Monte Carlo (metode de calcul numeric care implică folosirea procedeelor statistice).

În locul efectuării unui număr foarte mare de experiențe, se folosesc tabele de numere întîmplătoare (valorile pe care le poate lua o variabilă aleatoare) ceea ce permite folosirea mașinilor electronice de calcul.

10. *Pe o masă sînt trasate linii paralele echidistante. Fie h distanța dintre două linii. Se aruncă pe masă o plăcuță subțire în formă de poligon convex, cu perimetrul $l < h$.* Să se găsească probabilitatea ca plăcuța să intersecteze o linie.*

Rezolvare. Să presupunem că poligonul convex are n laturi pe care le numerotăm de la 1 la n. Fie l_k lungimea laturii k, $k = \overline{1, n}$. Deoarece $l = \sum_{k=1}^{n} l_k$ și $l < h$, urmează că $l_k < h$, deci oricare din laturile poligonului convex este mai mică decît distanța dintre două linii vecine. Dacă poligonul intersectează o linie, atunci în baza convexității, linia este intersectată de două și numai două dintre laturile poligonului. Să notăm cu A evenimentul ca

* Condiția $l < h$ asigură că plăcuța nu poate intersecta decît cel mult o linie.

plăcuța să intersecteze o linie și cu A_{jk} evenimentul ca linia să fie intersectată în același timp de laturile j și k; $j \neq k$.

Deoarece $A_{jk} = A_{kj}$, considerăm numai evenimentele A_{jk} cu $j < k$; $j, k = \overline{1, n}$. Evenimentele A_{jk} sînt incompatibile două cîte două, iar

$$A = (A_{12} \cup A_{13} \cup \ldots \cup A_{1n}) \cup (A_{23} \cup \ldots \cup A_{2n}) \cup \ldots \cup (A_{n-2,n-1} \cup A_{n-2,n}) \cup A_{n-1,n},$$

deci

$$P = P(A) = (p_{12} + p_{13} + \ldots + p_{1n}) + (p_{23} + \ldots + p_{2n}) + \ldots + (p_{n-2,n-1} + p_{n-2,n}) + p_{n-1,n},$$ unde am notat prin $p_{jk} = P(A_{jk})$.

Ținînd seama că $p_{jk} = p_{kj}$, putem scrie mai departe

$$P = \frac{1}{2}[(p_{12} + p_{13} + \ldots + p_{1n}) + (p_{21} + p_{23} + \ldots p_{2n}) + \ldots + (p_{n1} + p_{n2} + \ldots + p_{n,n-1})].$$

Observăm acum că $\bigcup_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{n} A_{jk}$ este evenimentul ca o linie să fie intersectată de latura j. În adevăr evenimentul ca latura j să intersecteze o linie se poate realiza prin $n - 1$ modalități incompatibile între ele (o linie este intersectată în același timp de latura j și de una dintre laturile $1, \ldots, j-1, j+1, \ldots, n$), anume prin evenimentele A_{jk}, $k = 1, \ldots, j-1, j+1, \ldots, n$. Prin urmare $P(\bigcup_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{n} A_{jk}) = \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{n} P(A_{jk}) = \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{n} p_{jk}$ este probabilitatea ca latura j să intersecteze o linie. Pentru calcularea acestei probabilități folosim **formula (6)**, problema **9**, punctul a), deoarece lungimea laturii j, $l_j < h$, deci

$$\sum_{k=1}^{n} p_{jk} = \frac{2l_j}{h\pi}$$

de unde

$$P = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n} \frac{2l_j}{h\pi} = \frac{l}{h\pi}, \tag{12}$$

unde așa cum se știe, l este perimetrul poligonului convex.

Observație. Formula (12) nu depinde de numărul de laturi ale poligonului convex, și nici de lungimea fiecărei laturi în parte, ci numai de perimetrul poligonului și de distanța dintre două linii vecine. Prin urmare formula (12) este valabilă pentru orice poligon convex cu parametrul $l < h$, și chiar pentru orice contur convex (care poate fi considerat totdeauna ca limita unui poligon convex cînd numărul de laturi tind la ∞). În particular formula (12) este adevărată și pentru un cerc de rază r pentru care $2\pi r < h$ și în acest caz avem $P = \frac{2r}{h}$.

Coli tipo 15,25

Tiparul executat sub comanda
nr. 6 la
Întreprinderea Poligrafică,
„13 Decembrie 1918",
str. Grigore Alexandrescu nr. 89—97,
București,
Republica Socialistă România